# Решения и ответы

Вариант 1

1. Вычислите: $\dfrac{(8^3)^2 \cdot (9^2)^3 \cdot 25^4}{(6^5)^2 \cdot (10^2)^3 \cdot 15^2}$

   *Ответ:* 4

   *Решение.*
   $\dfrac{(8^3)^2 \cdot (9^2)^3 \cdot 25^4}{(6^5)^2 \cdot (10^2)^3 \cdot 15^2} = \dfrac{2^{18} \cdot 3^{12} \cdot 5^8}{2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 2^6 \cdot 5^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = \dfrac{2^{18} \cdot 3^{12} \cdot 5^8}{2^{16} \cdot 3^{12} \cdot 5^8} = 4$

2. Решите уравнение: а) $\dfrac{2x+3}{5} = 4 - \dfrac{3x-1}{2}$

   б) $(2x+5)^2 - 4(x-3)(x+3) = 1$

   в) $||2+x| - 3| = 5$

   *Ответ:*

   а) $x = 2\frac{1}{19}$;

   б) $x = -3$;

   в) $x = -10$ или $x = 6$.

   *Решение.*

   а) $\dfrac{2x+3}{5} = 4 - \dfrac{3x-1}{2}$

   $2(2x+3) = 4 \cdot 10 - 5(3x-1)$

   $4x + 6 = 40 - 15x + 5$

   $19x = 39$

   $x = 2\frac{1}{19}$

   б) $(2x+5)^2 - 4(x-3)(x+3) = 1$

   $4x^2 + 20x + 25 - 4(x^2 - 9) = 1$

   $20x = -60$

   $x = -3$

   в) $||2+x| - 3| = 5$

   $\left[\begin{array}{l} |2+x| - 3 = 5 \\ |2+x| - 3 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |2+x| = 8 \\ |2+x| = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+x = 8 \\ 2+x = -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -10 \end{array}\right.$

3. Разложите на неразложимые множители:

   а) $y^2(y+5) + 14y(y+5) + 49(y+5)$;

   б) $x^6 - 10x^3 + 25 - x^4$;

   в) $m^3 - 4m^2 - 16m + 64$.

   *Ответ:* а) $(y+5)(y+7)^2$; б) $(x^3 - x^2 - 5)(x^3 + x^2 - 5)$; в) $(m+4)(m-4)^2$.

   *Решение.*

   а) $y^2(y+5) + 14y(y+5) + 49(y+5) = (y+5)(y^2 + 14y + 49) = (y+5)(y+7)^2$

   б) $x^6 - 10x^3 + 25 - x^4 = (x^3 - 5)^2 - x^4 = (x^3 - x^2 - 5)(x^3 + x^2 - 5)$

   в) $m^3 - 4m^2 - 16m + 64 = (m^3 + 64) - 4m^2 - 16m = (m+4)(m^2 - 4m + 16) - 4m(m+4) = (m+4)(m^2 - 8m + 16) = (m+4)(m-4)^2$

4. Половину пути пешеход шел со скоростью 4,5 км/ч, а затем задержался на 5 минут, чтобы отдохнуть. Поэтому, чтобы наверстать потерянное время и прийти в пункт назначения вовремя, он увеличил скорость на 0,5 км/ч. Каков весь путь пешехода?

   *Ответ:* 7,5 км.

   *Решение.*

   Пусть первую половину пути путник прошёл за $x$ часов. Тогда эта половина пути равна $4{,}5x$, и вторая половина также равна $4{,}5x$. Вторую половину пути пешеход шёл со скоростью $4{,}5 + 0{,}5 = 5$ км/ч. Так на путь он потратит $x - \frac{1}{12}$ часа, составим уравнение:

   $5 \cdot (x - \frac{1}{12}) = 4{,}5x$

   $x = \frac{5}{6}$

   Путь пешехода равен $2 \cdot 4{,}5x = 2 \cdot 4{,}5 \cdot \frac{5}{6} = 7{,}5$ км.

5. а) Напишите уравнение прямой, если известно, что она проходит через точку $K(-1; 3)$ и не пересекает прямую, заданную уравнением $y = 2x - 5$.
   б) Постройте полученную прямую.
   в) Найдите координаты точки на этой прямой, абсцисса которой в три раза меньше ординаты.

   *Ответ:* а) $y = 2x + 5$; б) см. решение; в) $(5; 15)$.

   *Решение.*

   В уравнении прямой $y = kx + b$ необходимо найти коэффициенты $k$ и $b$. Так как эта прямая параллельна прямой $y = 2x - 5$, $k = 2$ и $b \neq -5$: $y = 2x + b$.

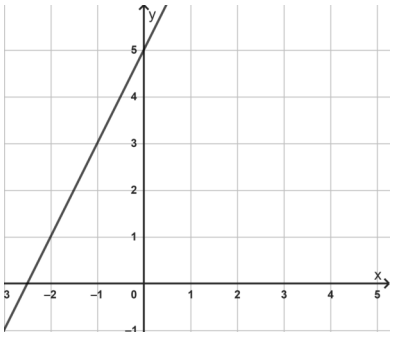
   Так как прямая проходит через точку $K(-1; 3)$, то при $x = -1$ $y = 3$:

   $3 = 2 \cdot (-1) + b \Leftrightarrow b = 5$.

   $b \neq -5$, это условие выполнено.

   Уравнение прямой: $y = 2x + 5$.

   б) При $x = 0$ $y = 2 \cdot 0 + 5 = 5$; при $x = -1$ $y = 2 \cdot (-1) + 5 = 3$. Прямая проходит через точки $(0; 5)$ и $(-1; 3)$:




   в) Абсцисса точки в три раза меньше ординаты. Значит, $3x = y$. Подставим в уравнение прямой $y = 2x + 5$:

   $3x = 2x + 5x = 5$, $y = 15$.

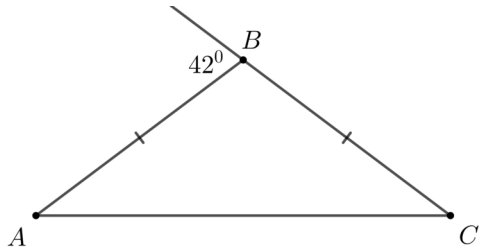
6. Чем равен угол между минутной и часовой стрелками часов в 17:00?

   *Ответ:* $150^\circ$.

   *Решение.*

   $\frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ$.

7. По данным рисунка найдите угол $\angle C$:

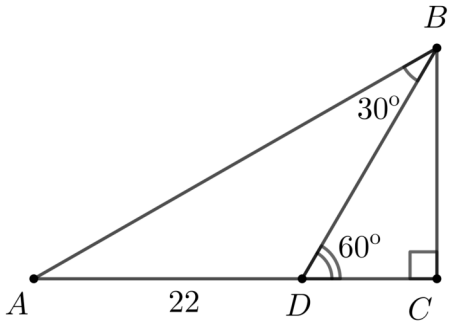



*Ответ:* $21^o$.

*Решение.*

$\angle C = \frac{1}{2} \cdot 42^o = 21^o$.

8. По данным рисунка найдите $AC$:




*Ответ:* 33

*Решение.*

1) В $\triangle CBD \angle CBD = 90^o - 60^o = 30^o$. По свойству прямоугольного треугольника с углом $30^o$ $DC = \frac{1}{2}BD$.

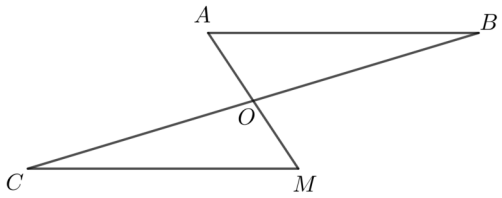
2) $\angle BDC$ — внешний угол $\triangle ABD$, по теореме о внешнем угле $\angle A = 60^o - 30^o = 30o$.

3) $\triangle ABD$ - равнобедренный по признаку, следовательно, $BD = AD = 22$.

4) $DC = \frac{1}{2}BD = 11$.

5) $AC = 22 + 11 = 33$.

9. Отрезки $AB$ и $CM$ параллельны и равны, а отрезки $AM$ и $BC$ пересекаются. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle MCB$.




*Решение.*

$\triangle BAC = \triangle CBM$ по I признаку, т.к. в них:

1) $\angle ABC = \angle BCM$ по свойству накрест лежащих углов при $AB \parallel CM$ и секущей $AM$;

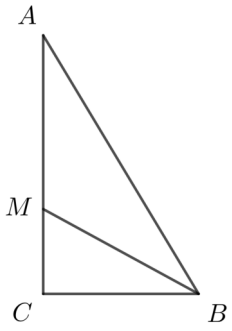
2) $AB = CM$ по условию;

3) $BC$ — общая сторона.

10. В прямоугольном треугольнике $ABC$ с гипотенузой $AB$ биссектриса $BM$ в 2 раза больше $CM$ и на 17 см меньше $AC$. Найти больший катет треугольника $ABC$.

*Ответ:* 51 см.

*Решение.*




1) Т. к. в прямоугольном $\triangle BMC$ $BM = 2CM$, то по признаку $\angle CBM = 30^\circ$.

2) Т. к. $BM$ — биссектриса угла $B$, то $\angle B = 60^\circ$. В $\triangle ABC$ $\angle A = 90^\circ = 60^\circ = 30^\circ$.

3) $\triangle ABM$ — равнобедренный по признаку и $AM = BM = 2MC$.

4) $BM = AC - 17 \Rightarrow AM = AC - 17 \Rightarrow MC = 17 \Rightarrow AC = 51$.

Это и есть больший катет треугольника $ABC$, т.к. он лежит против большего угла $60^\circ$.

11. В $\triangle ABC$ $\angle B$ и $\angle C$ относятся как 5 : 3, а $\angle A$ на $80^\circ$ больше их разности. Найдите углы, на которые высота треугольника $AD$ разбивает угол $A$.

*Ответ:* $40^\circ$ и $60^\circ$

*Решение.*

Пусть $\angle B = 5x$, $\angle C = 3x$, $\angle A = 2x + 80^\circ$.

По теореме о сумме углов треугольника $5x + 3x + 2x + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 10^\circ$.

Угла треугольника равны $50^\circ$, $30^\circ$, $100^\circ$.

Угол $A$ делится высотой на углы $90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ и $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

12. Сколько цифр в числе $10^{50}$?

*Ответ:* 51 цифра.

*Решение.*

В записи это числа одна единица и пятьдесят нулей, всего 51 цифра.

13. Докажите, что значение выражения $(x - 2y)(x - 2y - 4) + 4$ неотрицательно при любых значениях $x$ и $y$.

*Решение.*

$(x-2y)(x-2y-4)+4 = x^2-4xy-4x+4y^2+8y+4 = (x-2y)^2-4(x-2y)+4 = (x-2y+2)^2$.

Полный квадрат всегда принимает неотрицательные значения.

Вариант 2

1. Вычислите: $\dfrac{(14^2)^7 \cdot (16^2)^3}{(49^3)^2 \cdot (32^2)^4}$

*Ответ:* 12,25

*Решение.*
$\dfrac{(14^2)^7 \cdot (16^2)^3}{(49^3)^2 \cdot (32^2)^4} = \dfrac{2^{14} \cdot 7^{14} \cdot 2^{24}}{7^{12} \cdot 2^{40}} = \dfrac{2^{38} \cdot 7^2}{2^{40}} = \dfrac{49}{4}$

2. Решите уравнение:

а) $4 - \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{x+5}{2}$;

б) $(2x-1)^2 + 4(3-x)(x+3) = 0$;

в) $||x-1|-1| = 4$.

*Ответ:*

а) $x = 2$;

б) $x = 9{,}25$;

в) $x = -4$ или $x = 6$.

*Решение.*

а) $4 - \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{x+5}{2}$

$24 - (x+1) = 3(x+5)$

$24 - x - 1 = 3x + 15$

$8 = 4x$

$x = 2$

б) $(2x-1)^2 + 4(3-x)(x+3) = 0$

$4x^2 - 4x + 1 + 4(9 - x^2) = 0$

$4x = 37$

$x = \frac{37}{4}$

в) $||x-1|-1| = 4$

$$\left[\begin{array}{l} |x-1|-1 = 4 \\ |x-1|-1 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-1| = 5 \\ |x-1| = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 = 5 \\ x-1 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -4 \end{array}\right.$$

3. Разложите на неразложимые множители:

а) $c^2(c+1) - 12c(c+1) + 36(c+1)$;

б) $9x^6 - 24x^3 + 16 - x^2$;

в) $27 + 2y^2 - 6y - y^3$.

*Ответ:* а) $(c+1)(c-6)^2$; б) $(3x^3 - x - 4)(3x^3 + x - 4)$; в) $(3-y)(y^2 + y + 9)$.

*Решение.*

а) $c^2(c+1) - 12c(c+1) + 36(c+1) = (c+1)(c^2 - 12c + 36) = (c+1)(c-6)^2$

б) $9x^6 - 24x^3 + 16 - x^2 = (3x^3 - 4)^2 - x^2 = (3x^3 - x - 4)(3x^3 + x - 4)$

в) $27 + 2y^2 - 6y - y^3 = (27 - y^3) + 2y^2 - 6y = (3-y)(9 + 3y + y^2) + 2y(y-3) = (3-y)(9 + 3y + y^2 - 2y) = (3-y)(y^2 + y + 9)$

4. Дорога между пунктами $A$ и $B$ состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 14 км. Турист прошёл из $A$ в $B$ за 4 часа, из которых спуск занял 2 часа. С какой скоростью турист шёл на спуске, если его скорость на подъёме меньше его скорости на спуске на 3 км/ч?

   *Ответ:* 5 км/ч.

   *Решение.*

   Примем скорость на подъёме за $x$ км/ч, а на спуске за $x+3$ км/ч. На подъёме турист прошёл $(4-2)\cdot x = 2x$ км, а на спуске $2(x+3)$ км. Так как всего он прошёл 14 км, составим уравнение:

   $2x + 2(x+3) = 14$

   $x = 2$

   Скорость туриста на спуске $x+3 = 5$ км/ч.

5. а) Напишите уравнение прямой, если известно, что она проходит через точку $K(-2;3)$ и не пересекает прямую, заданную уравнением $y = 3x - 4$.
   б) Постройте полученную прямую.
   в) Найдите координаты точки на этой прямой, абсцисса которой в два раза меньше ординаты.

   *Ответ:* а) $y = 3x + 9$; б) см. решение; в) $(-9;-18)$.

   *Решение.*

   В уравнении прямой $y = kx+b$ необходимо найти коэффициенты $k$ и $b$. Так как эта прямая параллельна прямой $y = 3x - 4$, $k = 3$ и $b \neq -4$: $y = 3x + b$.

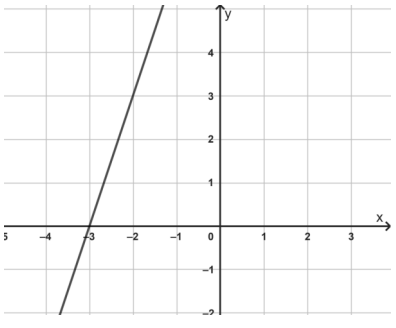
   Так как прямая проходит через точку $K(-2;3)$, то при $x = -2$ $y = 3$:

   $3 = 3\cdot(-2) + b \Leftrightarrow b = 9$.

   $b \neq -4$, это условие выполнено.

   Уравнение прямой: $y = 3x + 9$.

   б) При $x = -2$ $y = 3\cdot(-2)+9 = 3$; при $x = -3$ $y = 3\cdot(-3)+9 = 0$. Прямая проходит через точки $(-2;3)$ и $(-3;0)$:

   в) Абсцисса точки в два раза меньше ординаты. Значит, $2x = y$. Подставим в уравнение прямой $y = 3x + 9$:

   $2x = 3x + 9x = -9$, $y = -18$.

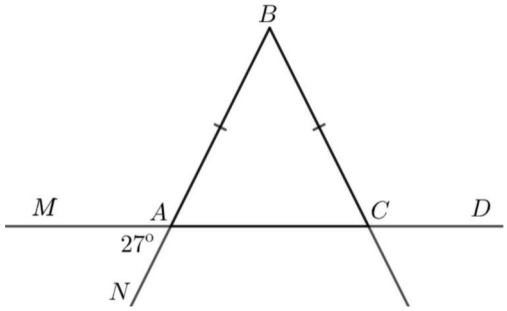
6. Чему равен угол между стрелками часов, если часы показывают 14 часов 00 минут?

   *Ответ:* $60^\circ$.

   *Решение.*

   $\frac{2}{12}\cdot 360^\circ = 60^\circ$.

7. По данным рисунка найдите угол $\angle DCB$.

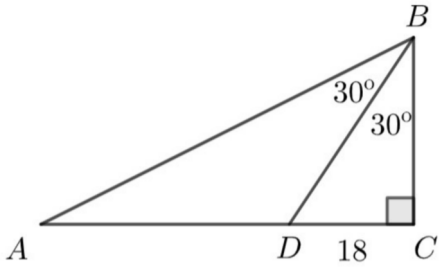



*Ответ:* 153°.

*Решение.*

$\angle DCB = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 27^\circ = 153^\circ$

8. По данным чертежа найдите $AD$.




*Ответ:* 36

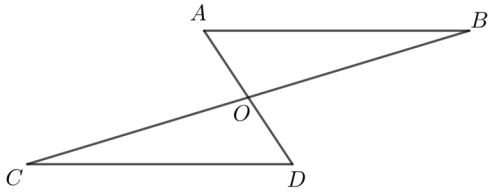
*Решение.*

1) В $\triangle BCDBD = 2DC = 36$ по свойству прямоугольного треугольника с углом 30°.

2) В прямоугольном треугольнике $ABC$ $\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

3) $\triangle ABD$ равнобедренный по признаку, значит, $AD = BD = 36$.

9. Отрезки $AB$ и $CD$ параллельны и равны, а отрезки $AD$ и $BC$ пересекаются. Доказать, что $\triangle ABD = \triangle ACD$.




*Решение.*

$\triangle ABD = \triangle CAD$ по I признаку, т.к. в них:

1) $\angle BAD = \angle CDA$ по свойству накрест лежащих углов при $AB \parallel CD$ и секущей $AD$;

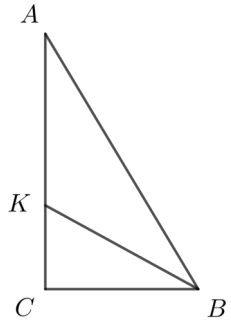
2) $AB = CD$ по условию;

3) $AD$ — общая сторона.

10. В прямоугольном треугольнике $ABC$ с гипотенузой $AB$ на катете $AC$ выбрана точка $K$ так, что $CK$ в 2 раза меньше $BK$, $BK = AK$. Найдите больший катет треугольника $ABC$, если $CK$ меньше $AK$ на 25 см.

*Ответ:* 70 см

*Решение.*




1) Т. к. в прямоугольном $\triangle CBK$ $BK = 2CK$, то по признаку $\angle CBK = 30^\circ$, $\angle CKB = 60^\circ$.

2) Т. к. $\triangle ABK$ равнобедренный, то $\angle A = \angle ABK = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.

3) $CK =$, и вто же же время $CK$ на 25 см меньше $AK$. Значит, $CK = 25$, $AK = 50$, $AC = 70$ см.

Это и есть больший катет треугольника $ABC$, т.к. он лежит против большего угла $60^\circ$.

11. В $\triangle ABC$ $\angle B$ и $\angle C$ относятся как $3 : 2$, а $\angle A$ на $40^\circ$ больше их суммы. Найдите углы, на которые высота треугольника $AD$ разбивает угол $A$.

*Ответ:* $48^\circ$ и $62^\circ$

*Решение.*

Пусть $\angle B = 3x$, $\angle C = 2x$, $\angle A = 5x + 40^\circ$.

По теореме о сумме углов треугольника $2x + 3x + 5x + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 14^\circ$.

Угла треугольника равны $28^\circ$, $42^\circ$, $110^\circ$.

Угол $A$ делится высотой на углы $90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$ и $90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$.

12. Сколько цифр в числе $10^{40}$?

*Ответ:* 41 цифра.

*Решение.*

В записи это числа одна единица и сорок нулей, всего 41 цифра.

13. Докажите, что значение выражения $(x + y)(x + y - 2) + 1$ неотрицательно при любых значениях $x$ и $y$.

*Решение.*

$(x + y)(x + y - 2) + 1 = x^2 + 2xy - 2x + y^2 - 2y + 1 = (x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = (x + y - 1)^2$.

Полный квадрат всегда принимает неотрицательные значения.