Решения и ответы

Вариант 1

1. *Если разделить* 50^{50} *на* 25^{25}*, то получится...*

   Ответ: 4) 100^{25}

   Решение.

   $50^{50} : 25^{25} = (25 \cdot 2)^{50} : 25^{25} = 25^{50} \cdot 2^{50} : 25^{25} = 25^{50-25} \cdot 2^{50} = 25^{25} \cdot 4^{25} = 100^{25}$

2. *Решите уравнение:* $\dfrac{4x+7}{5} - \left(1 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{2-5x}{2}\right) = 32$

   Ответ: $x = -153$

   Решение.

   $\dfrac{4x+7}{5} - \left(1 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{2-5x}{2}\right) = 32$

   $\dfrac{4x+7}{5} - 1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{2-5x}{2} = 32 \ |\cdot 10$

   $8x + 14 - 10 + 15x + 10 - 25x = 320$

   $x = -153$

3. *Решите уравнение:*

   $$(1-2x)(4x^2+2x+1) + x(2x-3)(1+4x) = 13 - 10x^2$$

   Ответ: $x = -4$

   Решение.

   $1 - 8x^3 + 8x^3 - 10x^2 - 3x = 13 - 10x^2$

   $-12 = 3x$

   $x = -4$

4. *Разложите на неразложимые множители:* $3y^4 - 24y^2 + 48$.

   Ответ: $3(y-2)^2(y+2)^2$

   Решение.

   $3y^4 - 24y^2 + 48 = 3(y^4 - 8y^2 + 16) = 3(y^2-4)^2 = 3(y-2)^2(y+2)^2$

5. *Решите уравнение:* $|x + 2024| = |x - 2025|$

   Ответ: $x = 0{,}5$

   Решение.

   Из равенства $|a| = |b|$ следует, что либо $a = b$, либо $a = -b$. Значит

   $$\left[\begin{array}{l} x + 2024 = x - 2025 \\ x + 2024 = -x + 2025 \end{array}\right.$$

   Первое уравнение не имеет корней, а у второго корень $x = 0{,}5$.

6. *Разложите на неразложимые множители:* $27x^3 + 8 - 12x - 18x^2$.

   Ответ: $(3x + 2)(3x - 2)^2$

   Решение.

   $27x^3 + 8 - 12x - 18x^2 = (3x)^3 + 2^3 - (12x + 18x^2) = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4) - 6x(2 + 3x) = (3x + 2)(9x^2 - 12x + 4) = (3x + 2)(3x - 2)^2$

7. *Числа a, b, c, d таковы, что $(a+b)^2 + (c+d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$. Следовательно...*

   Ответ: 2) $a = b$ и $c = d$

   Решение.

   $(a + b)^2 + (c + d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$

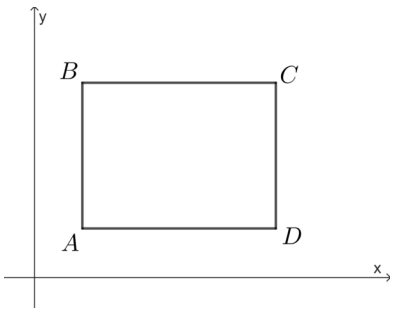
   $a^2 + 2ab + b^2 + c^2 + 2cd + d^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2$

   $0 = a^2 + b^2 - 2ab + c^2 + d^2 - 2cd$

   $0 = (a - b)^2 + (c - d)^2$

   Сумма двух квадратов равняется нулю в том и только том случае, когда каждый из них равен нулю. Следовательно, $a = b$ и $c = d$.

8. *Прямоугольник $ABCD$ лежит в первой четверти. Его стороны параллельны осям координат (см. рисунок). Для какой из его вершин отношение её ординаты к её абсциссе является наименьшим?*



   Ответ: D.

   Решение.

   $\frac{y}{x}$ наименьшее, при этом все y и x положительны. Значит, y должно быть наименьшим, а x - наибольшим. Оба условия выполняются для вершины D.

9. *На рисунке (см. условие) изображён график функции $y = ax + b$.*

   а) На этом же рисунке постройте график функции
   $y = bx + a$.
   б) Напишите уравнение прямой l, проходящей через точку пересечения построенных графиков и параллельной прямой $3x + y + 7 = 0$.

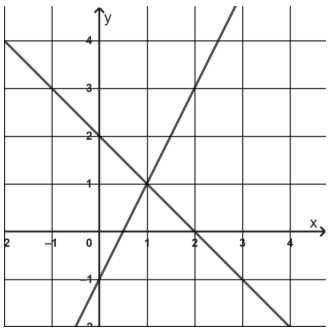
   Ответ: а) см. решение б) $y = -3x + 4$

   Решение.

   а) Уравнение прямой на рисунке: $y = -x + 2$ (можно написать его по двум точкам, через которые проходит прямая, либо можно визуально определить угловой коэффициент и сдвиг).

Значит, $a = -1$, $b = 2$.

Прямая $y = bx + a$ задана уравнением $y = 2x - 1$. Построить её можно по двум точкам, например, $(0; -1)$ и $(1; 1)$:



б)

Построенные графики пересекаются в точке $(1; 1)$.

Прямая должна быть параллельна прямой $3x + y + 7 = 0$, или $y = -3x - 7$.

Прямые параллельны, если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$. Значит, уравнение искомой прямой $y = -3x + b$. Найдём b, подставив координаты точки $(1; 1)$, через которую прямая проходит:

$1 = -3 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 4$

Выполняется условие $b \neq -7$, значит, прямые действительно параллельны, а не совпадают.

$l : y = -3x + 4$

10. *От станции к посёлку, удалённому на 104 км, отправились одновременно мотоциклист и автомобилист. Скорость автомобилиста на 30 км/ч больше скорости мотоциклиста. Прибыв в посёлок, автомобилист сразу повернул обратно и встретил мотоциклиста через 1 ч. 36 мин. после его выезда со станции. На каком расстоянии от станции произошла встреча?*

Ответ: 80 км.

Решение.

Пусть скорость мотоциклиста равна x км/ч, а скорость автомобилиста $x + 30$ км/ч.

Каждый из них ехал 1 ч. 36 мин., это 1,6 ч.

Мотоциклист проехал за это время $1{,}6x$ км, а автомобилист $1{,}6 \cdot (x + 30)$ км.

Так как вместе они проехали удвоенное расстояние от станции до посёлка, составим уравнение:

$1{,}6x + 1{,}6(x + 30) = 2 \cdot 104$

$x = 50$

Мотоциклист проехал $1{,}6 \cdot 50 = 80$ км. Это и есть расстояние от станции до места встречи.

11. *Докажите, что число $2^9 + 27^5 + 3 \cdot 9^8 + 4 \cdot 8^3$ делится на 10.*

Решение.

$2^9 + 27^5 + 3 \cdot 9^8 + 4 \cdot 8^3 = 2^9 + 3^{15} + 3 \cdot 3^{16} + 4 \cdot 2^9 = 2^9 + 4 \cdot 2^9 + 3^{15} + 9 \cdot 3^{15} = 5 \cdot 2^9 + 10 \cdot 3^{15}$.

Оба слагаемых в этой сумме — натуральные числа. Первое делится на 10, так как оно делится на 5 и на 2. Во втором слагаемом есть множитель 10, поэтому оно делится на 10. Оба слагаемых кратны 10, следовательно, сумма также кратна.

12. *Дополнительная задача.* a, b, c *— некоторые числа. Вычислите:* $(ab - |ab|) \cdot (bc - |bc|) \cdot (ac - |ac|)$.

Ответ: 0.

Решение.

Среди трёх ненулевых чисел a, b, c хотя бы два — одного знака (либо положительны, либо отрицательны). Без ограничения общности будем считать, что это a и b. Тогда $ab = |ab|$ и $ab - |ab| = 0$, и произведение равно нулю.

Если же одно из чисел равно нулю, то оба произведения в скобке равны нулю, их разность также нуль, и всё произведение нуль.

Дополнительная задача. x, y, k *— натуральные числа. Известно, что* $x + y = 125$ *и* $2^x \cdot 3^y = 72^k$. *Найдите* x, y, k.

Ответ: $k = 25$, $x = 75$, $y = 50$

Решение.

$2^x \cdot 3^y = 72^k \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^y = (2^3 \cdot 3^2)^k \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^y = 2^{3k} \cdot 3^{2k}$

$$\begin{cases} \text{x=3k} \\ \text{y=2k} \\ \text{x+y=125} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{k=25} \\ \text{x=75} \\ \text{y=50} \end{cases}$$

Вариант 2

1. *Если разделить* 60^{60} *на* 30^{30}*, то получится...*

   Ответ: 2) 120^{30}

   Решение.

   $60^{60} : 30^{30} = (2 \cdot 30)^{60} : 30^{30} = 2^{60} \cdot 30^{60} : 30^{30} = 2^{60} \cdot 30^{30} = 4^{30} \cdot 30^{30} = 120^{30}$

2. *Решите уравнение:* $\dfrac{7x-30}{5} - \left(4 - \dfrac{3x}{10} - \dfrac{x-60}{2}\right) = 202$

   Ответ: $x = 110$

   Решение. $\dfrac{7x-30}{5} - \left(4 - \dfrac{3x}{10} - \dfrac{x-60}{2}\right) = 202$

   $\dfrac{7x-30}{5} - 4 + \dfrac{3x}{10} + \dfrac{x-60}{2} = 202 \mid \cdot 10$

   $14x - 60 - 40 + 3x + 5x - 300 = 2020$

   $x = 110$

3. *Решите уравнение:*

   $(2x+1)(4x^2-2x+1) + 2x(4x-1)(3-x) = 26x^2 - 23$

   Ответ: $x = 4$

   Решение.

   $8x^3 + 1 - 8x^3 + 26x^2 - 6x = 26x^2 - 23$

   $-6x = -24$

   $x = 4$

4. *Решите уравнение:* $|2024 - x| = |2025 + x|$

   Ответ: $x = -0{,}5$

   Решение.

   Из равенства $|a| = |b|$ следует, что либо $a = b$, либо $a = -b$. Значит

   $$\left[\begin{array}{l} 2024 - x = 2025 + x \\ 2024 - x = -2025 - x \end{array}\right.$$

   Второе уравнение не имеет корней, а у первого корень $x = -0{,}5$.

5. *Разложите на неразложимые множители:* $2x^4 - 36x^2 + 162$.

   Ответ: $2(x-3)^2(x+3)^2$

   Решение.

   $2x^4 - 36x^2 + 162 = 2(x^4 - 18x^2 + 81) = 2(x^2 - 9)^2 = 2(x-3)^2(x+3)^2$

6. *Разложите на неразложимые множители:* $8x^3 + 27 - 12x^2 - 18x$

   Ответ: $(2x+3)(2x-3)^2$

   Решение.

   $(2x)^3 + 3^3 - (12x^2 + 18x) = (2x+3)(4x^2 - 6x + 9) - 6x(2x+3) = (2x+3)(4x^2 - 12x + 9) = (2x+3)(2x-3)^2$

7. *Числа a, b, c, d таковы, что $(a-b)^2+(c-d)^2=2(a^2+b^2+c^2+d^2)$. Следовательно...*

   Ответ: 4) $a=-b$ и $c=-d$

   Решение. $(a-b)^2+(c-d)^2=2(a^2+b^2+c^2+d^2)$

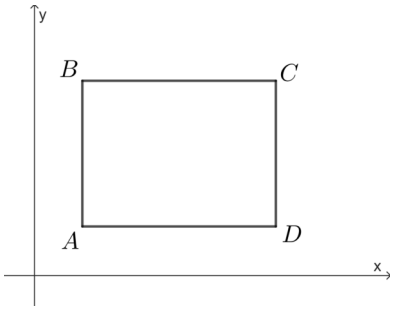
   $a^2-2ab+b^2+c^2-2cd+d^2=2a^2+2b^2+2c^2+2d^2$

   $0=a^2+2ab+b^2+c^2+2cd+d^2$

   $0=(a+b)^2+(c+d)^2$

   Сумма двух квадратов равняется нулю в том и только том случае, когда каждый из них равен нулю. Следовательно, $a=-b$ и $c=-d$.

8. *Прямоугольник $ABCD$ лежит в первой четверти. Его стороны параллельны осям координат (см. рисунок). Для какой из его вершин отношение её абсциссы к её ординате является наименьшим?*



   Ответ: для B.

   Решение.

   $\frac{x}{y}$ принимает наименьшее значение (при том, что обе переменные положительны) при наименьшем x и наибольшем y. Оба эти условия выполняются для точки B.

9. *На рисунке (см. в условии задачи) изображён график функции $y=ax+b$.*
   а) На этом же рисунке постройте график функции
   $y=bx+a$. б) Напишите уравнение прямой l, проходящей через точку пересечения построенных графиков и параллельной прямой $3x+y+7=0$.

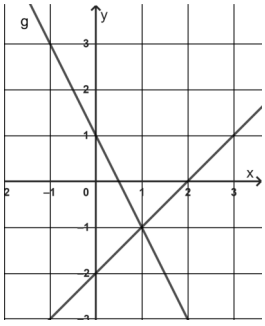
   Ответ: а) см. решение б) $l: y=-3x+2$

   Решение.

   а) Уравнение прямой на рисунке: $y=x-2$ (можно написать его по двум точкам, через которые проходит прямая, либо можно визуально определить угловой коэффициент и сдвиг).

   Значит, $a=1$, $b=-2$.

   Прямая $y=bx+a$ задана уравнением $y=-2x+1$. Построить её можно по двум точкам, например, $(0;1)$ и $(1;-1)$:



б)

Построенные графики пересекаются в точке $(1; -1)$.

Прямая должна быть параллельна прямой $3x + y + 7 = 0$, или $y = -3x - 7$.

Прямые параллельны, если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$. Значит, уравнение искомой прямой $y = -3x + b$. Найдём b, подставив координаты точки $(1; -1)$, через которую прямая проходит:

$-1 = -3 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 2$

Выполняется условие $b \neq -7$, значит, прямые действительно параллельны, а не совпадают.

$l : y = -3x + 2$

10. *От станции к посёлку, удалённому от неё на 63 км, отправились одновременно мотоциклист и велосипедист. Скорость велосипедиста на 60 км/ч меньше скорости мотоциклиста. Прибыв в посёлок, мотоциклист сразу повернул обратно и встретил велосипедиста через 1 ч. 24 мин. после его выезда со станции. Какую часть пути от станции до посёлка проехал велосипедист до встречи?*

Ответ: $\frac{1}{3}$ пути проехал велосипедист до встречи

Решение.

Пусть скорость велосипедиста равна x км/ч, а скорость мотоциклиста $x + 60$ км/ч.

Каждый из них ехал 1 ч. 24 мин., это 1,4 ч.

Велосипедист проехал за это время $1{,}4x$ км, а мотоциклист $1{,}4 \cdot (x + 60)$ км.

Так как вместе они проехали удвоенное расстояние от станции до посёлка, составим уравнение:

$1{,}4x + 1{,}4(x + 60) = 2 \cdot 63$

$x = 15$

Велосипедист проехал $1{,}4 \cdot 15 = 21$ км. Это расстояние от станции до места встречи. Это составляет $\frac{21}{63} = \frac{1}{3}$ пути.

11. *Докажите, что число* $2^9 + 27^5 + 3 \cdot 9^8 + 4^3 \cdot 8^2$ *делится на 9.*

Решение.

$2^9 + 27^5 + 3 \cdot 9^8 + 4^3 \cdot 8^2 = 2^9 + 3^{15} + 3 \cdot 3^{16} + 2^6 \cdot 2^6 = 2^9 + 2^{12} + 3^{15} \cdot (1 + 9) = 2^9 \cdot 9 + 10 \cdot 3^{15}$

Первое слагаемое делится на 9, второе также делится (т.к. $9 = 3^2$), значит, и сумма делится.

12. *Дополнительное задание.* a, b — *некоторые числа. Вычислите:* $(a^2b - |a^2b|) \cdot (ab^2 - |ab^2|) \cdot (ab - |ab|)$.

Ответ: 0

Решение.

Если $b > 0$, то $a^2b = |a^2b|$, и первая скобка равна нулю (и всё произведение тоже).

Если $a > 0$, то $ab^2 = |ab^2|$, и вторая скобка равна нулю (и всё произведение тоже).

Если $a < 0$ и $b < 0$, то $ab = |ab|$ и третья скобка равна нулю (и всё произведение тоже).

Если хотя бы одно из чисел 0, то все скобки равны 0, и произведение тоже.

x, y, k – *натуральные числа. Известно, что* $x + y = 75$ и $2^x \cdot 3^y = 72^k$. Найдите x, y, k.

Ответ: $k = 15$, $x = 45$, $y = 30$

Решение.

$2^x \cdot 3^y = 72^k \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^y = (2^3 \cdot 3^2)^k \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^y = 2^{3k} \cdot 3^{2k}$

$$\begin{cases} \text{x=3k} \\ \text{y=2k} \\ \text{x+y=75} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{k=15} \\ \text{x=45} \\ \text{y=30} \end{cases}$$