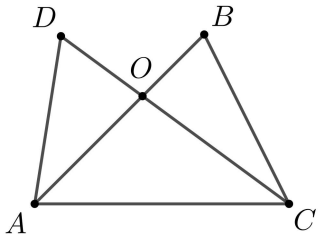
Решения и ответы

Вариант 1

1. На рисунке $AO = CO$, $\angle BAD = \angle BCD$. Найдите AO, если $DC = 14$; $OB = 4$.



Ответ: 10

Решение.

$\triangle BOC = \triangle DOA$ по II признаку.

$DC = AB$ как сумма равных отрезков ($DO = OB$ и $OA = OC$ как соответственные стороны).

$AO = AB - OB = DC - OB = 14 - 4 = 10$.

2. Внешний угол равнобедренного треугольника равен 108°. Найдите градусную меру наименьшего из внутренних углов треугольника.

Ответ: 36° или 54°

Решение.

Найдём внутренний угол треугольника, смежный с углом 108°: $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

Если этот угол противолежит основанию, то другие два угла равны $(180^\circ - 72^\circ) : 2 = 54^\circ$. Меньший угол равен 54°.

Если этот угол прилежит к основанию, то второй прилежащий также равен 72°, а противолежит основанию угол $180^\circ - 72^\circ \cdot 2 = 36^\circ$.

3. На высоте BB_1 треугольника ABC есть такая точка O, что $AO = OC$. Известно, что $\angle BAC = 40^\circ$. Найдите $\angle CBB_1$.

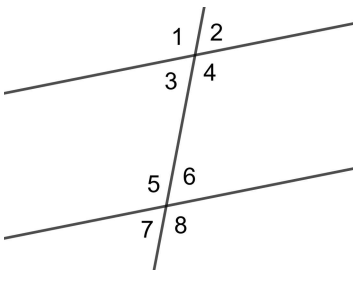
Ответ: 50°

Решение.

$\triangle AOC$ равнобедренный с основанием AC, значит, его высота OB_1 также является медианой, и точка B_1 — середина стороны AC.

$\triangle ABC$ также равнобедренный по признаку, BB_1 — биссектриса по свойству медианы р/б треугольника. Значит, $\angle CBB_1 = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 2 \cdot 40^\circ) = 50^\circ$.

4. Проведены две параллельные прямые и секущая. Известно, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 230^\circ$. Найдите $\angle 5$.



Ответ: 130°.

Решение.

$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ по свойству смежных углов. Значит, $\angle 3 = 230^\circ - 180^\circ = 50^\circ$.

$\angle 5$ и $\angle 3$ — внутренние односторонние при параллельных прямых, следовательно, по свойству их сумма равна 180°. Значит, $\angle 5 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

5. Укажите номера **неверных** утверждений. В ответе запишите номера выбранных утверждений.
1) В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, больше половины этой гипотенузы.
2) Если в каждом из двух равнобедренных треугольников есть стороны длины 4 и 9, то эти треугольники равны.
3) Если две прямые параллельны, то третья прямая всегда их пересекает.
4) Биссектрисы вертикальных углов всегда лежат на одной прямой.
5) Если в равнобедренном треугольнике есть угол, равный 40°, то обязательно есть угол, равный 100°.

Ответ: 135

Решение.

1) Неверно. Если треугольник равнобедренный, высота совпадает с медианой, а медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

2) Верно. Так как треугольник 9, 4, 4 не может существовать (не выполняется неравенство треугольника), то единственный вариант — треугольник со сторонами 9, 9, 4.

3) Неверно. Третья прямая может быть параллельна этим двум.

4) Верно. Это свойство биссектрис вертикальных углов.

5) Неверно. Например, в треугольнике 40°, 70°, 70°.

6. Точка B делит отрезок AC в отношении $2 : 1$, считая от точки A. Точка D делит отрезок AB в отношении $2 : 1$, считая от точки A. Найдите отношение $DC : AB$.

Ответ: $5 : 6$

Решение.

Так как $AB : BC = 2 : 1$, примем $AB = 2x$, $BC = x$.

Так как $AD : DB = 2 : 1$, то $AD = \frac{2}{3}AB = \frac{4}{3}x$, $DB = \frac{1}{3}AB = \frac{2}{3}x$.

$DC = \frac{2}{3}x + x = \frac{5}{3}x$.

$DC : AB = \frac{5}{3}x : 2x = 5 : 6$.

7. Периметр равнобедренного треугольника равен 28 см. Известно, что одна из его сторон в 1,5 раза меньше другой. Найдите большую сторону треугольника. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 10,5 см или 12 см

Решение.

Пусть меньшая сторона равна x см, большая $1{,}5x$ см.

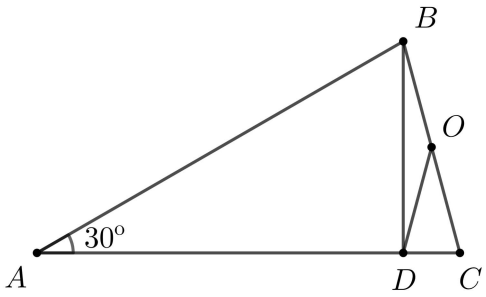
Если стороны треугольника равны x, x, $1{,}5x$, то $x = 28 : (1 + 1 + 1{,}5) = 8$, а большая сторона равна $8 \cdot 1{,}5 = 12$ (неравенство треугольника выполняется).

Если стороны треугольника равны x, $1{,}5x$, $1{,}5x$, то $x = 28 : (1{,}5 + 1{,}5 + 1) = 7$, а большая сторона равна $7 \cdot 1{,}5 = 10{,}5$ см.

8. В треугольнике ABC точка O — середина стороны BC и $\angle A = 30^\circ$. На стороне AC отмечена такая точка D, что $2DO = BC$. Найдите AB, если $BD = 1$.

Ответ: 2.

Решение.

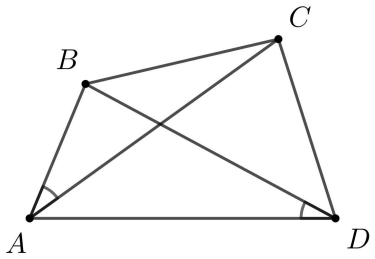


1) В $\triangle BDC$ медиана DO равна половине стороны BC, значит по признаку этот треугольник прямоугольный, BC — гипотенуза.

2) $\triangle BAD$ — прямоугольный с углом 30°, следовательно, по свойству $BD = \frac{1}{2}AB$.

3) $AB = 2BD = 2 \cdot 1 = 2$.

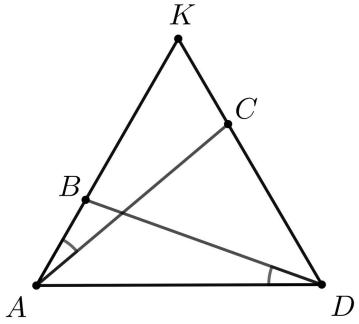
9. На рисунке четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle BAC = \angle BDA$ и $\angle BAD = \angle ADC = 60^\circ$. Найдите длину AD, если известно, что $AB = 6$, $CD = 14$.



Ответ: $AD = 20$

Решение.

Продлим стороны AB и DC так, чтобы они пересеклись в точке K (так как $\angle BAD + \angle ADC \neq 180^\circ$, эти прямые не параллельны).



Тогда в $\triangle ADK$ все углы равны по 60°, и он равносторонний по признаку.

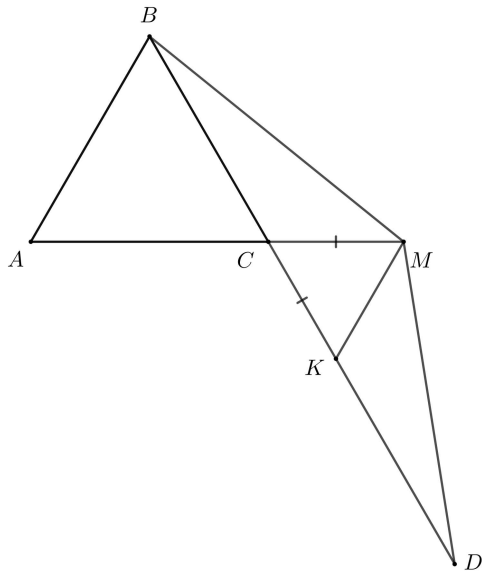
$\triangle AKC = \triangle ABD$ по II признаку ($AD = AK$ по доказанному, $\angle DAK = \angle K$ по доказанному, $\angle BAC = \angle BDA$ по условию).

$CK = AB = 6$ как соответственные стороны, $DK = CD + CK = 20$, $AD = DK = 20$ как стороны равностороннего треугольника.

10. Дан равносторонний треугольник ABC. Его стороны AC и BC продолжены соответственно за точку C на отрезки CM и CD так, что $BM = MD$. Докажите, что $AM = CD$.

Решение.

1) Отметим на отрезке CD точку K такую, что $CK = CM$:



2) $\triangle CKM$ - равнобедренный с углом 60°, поэтому он равносторонний, и $KM = CK = CM$.

3) В равнобедренном $\triangle BMD$ $\angle MBD = \angle MDB$ по свойству. $\angle BCM = \angle MKD = 120^o$. В $\angle BMC = \angle MDK$ как разность 180° и двух пар равных углов.

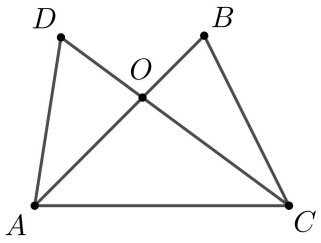
4) $\triangle BCM = \triangle MKD$ по II признаку ($\angle BMC = \angle MDK$ по доказанному, $BM = MD$ по условию, $CM = MK$ по доказанному).

Следовательно, $DK = BC = AC$.

5) $AM = AC + CM$; $DC = DK + CK$; $AM = DC$ как суммы равных отрезков.

Вариант 2

1. На рисунке $AO = CO$, $\angle DCB = \angle DAB$. Найдите OC, если $AB = 15$; $OD = 6$.



Ответ: 9

Решение.

$\triangle AOC$ равнобедренный с основанием $AC \Rightarrow \angle BAC = \angle DCA$ по свойству углов при основании р/б треугольника.

$\angle DAC = \angle BCA$ как сумма равных.

$\triangle DAC = \triangle BCA$ по II признаку $\Rightarrow AB = DC = 15$.

$AO = AB - OB = 15 - 6 = 9$.

2. Внешний угол равнобедренного треугольника равен 98°. Найдите градусную меру наименьшего из внутренних углов треугольника.

Ответ: 16° или 49°

Решение.

Найдём внутренний угол треугольника, смежный с углом 98°: $180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$.

Если этот угол противолежит основанию, то другие два угла равны $(180^\circ - 82^\circ) : 2 = 49^\circ$. Меньший угол равен 49°.

Если этот угол прилежит к основанию, то второй прилежащий также равен 82°, а противолежит основанию угол $180^\circ - 82^\circ \cdot 2 = 16^\circ$.

3. На высоте BB_1 треугольника ABC есть такая точка O, что $AO = OC$. Известно, что $\angle ABB_1 = 70^\circ$. Найдите $\angle BCA$.

Ответ: 20°

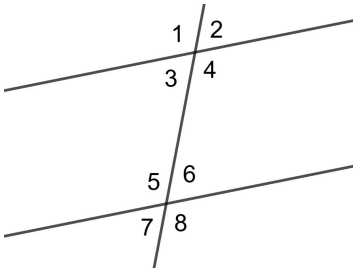
Решение.

$\triangle AOC$ равнобедренный с основанием AC, значит, его высота OB_1 также является медианой, и точка B_1 — середина стороны AC.

$\triangle ABC$ также равнобедренный по признаку, BB_1 — биссектриса по свойству медианы р/б треугольника. Значит, $\angle ABC = 2\angle ABB_1 = 140^\circ$.

В равнобедренном $\triangle BCA$ углы при основании равны между собой и равны $(180^\circ - 140^\circ) : 2 = 20^\circ$.

4. Проведены две параллельные прямые и секущая. Известно, что $\angle 3 + \angle 5 + \angle 6 = 230^\circ$. Найдите $\angle 4$.



Ответ: 130°.

Решение.

$\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$ по свойству смежных углов. Значит, $\angle 3 = 230^\circ - 180^\circ = 50^\circ$.

$\angle 4$ и $\angle 3$ — смежные, следовательно, по свойству их сумма равна 180°. Значит, $\angle 5 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

5. Укажите номера **неверных** утверждений. В ответе запишите номера выбранных утверждений.
1) В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, всегда меньше половины этой гипотенузы.
2) Если в каждом из двух равнобедренных треугольников есть стороны длины 2 и 5, то эти треугольники равны.
3) Три прямые на плоскости могут делить эту плоскость на 7 частей.
4) Биссектрисы смежных углов могут образовывать тупой угол.
5) Если в равнобедренном треугольнике есть угол, равный 80°, то обязательно есть угол, равный 50°.

Ответ: 145

Решение.

1) Неверно. Если прямоугольный треугольник также равнобедренный, то высота, опущенная на гипотенузу, совпадает с медианой. А медиана по свойсту равна половине гипотенузы. Значит, и высота равна.

2) Верно. Треугольник со сторонами 2, 2, 5 не может существовать, так как нарушено неравенство треугольника. Значит, есть единственный треугольник со сторонами 2, 5, 5.

3) Могут, когда у них три точки пересечения.

4) Неверно. По свойству биссектрис смежных углов, они всегда перпендикулярны.

5) Неверно. Существует треугольник 80°, 80°, 20°.

6. Точка B делит отрезок AC в отношении $3 : 1$, считая от точки A. Точка D делит отрезок AB в отношении $3 : 1$, считая от точки A. Найдите отношение $DC : AB$.

Ответ: $7 : 12$

Решение.

Так как $AB : BC = 3 : 1$, примем $AB = 3x$, $BC = x$.

Так как $AD : DB = 3 : 1$, то $AD = \frac{3}{4}AB = \frac{9}{4}x$, $DB = \frac{1}{4}AB = \frac{3}{4}x$.

$DC = \frac{3}{4}x + x = \frac{7}{4}x$.

$DC : AB = \frac{7}{4}x : 3x = 7 : 12$.

7. Периметр равнобедренного треугольника равен 56 см. Известно, что одна из его сторон в 1,5 раза меньше другой. Найдите большую сторону треугольника. Ответ дайте в сантиметрах.

   Ответ: 21 см или 24 см

   Решение.

   Пусть меньшая сторона равна x см, большая $1{,}5x$ см.

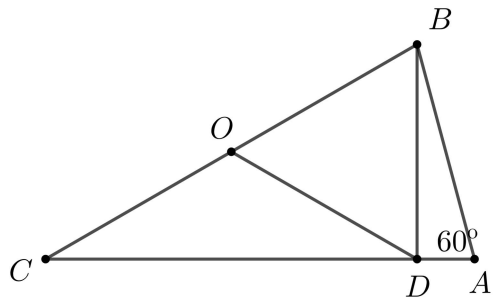
   Если стороны треугольника равны x, x, $1{,}5x$, то $x = 56 : (1+1+1{,}5) = 16$, а большая сторона равна $16 \cdot 1{,}5 = 24$ (неравенство треугольника выполняется).

   Если стороны треугольника равны x, $1{,}5x$, $1{,}5x$, то $x = 56 : (1{,}5 + 1{,}5 + 1) = 14$, а большая сторона равна $14 \cdot 1{,}5 = 21$ см.

8. В треугольнике ABC точка O — середина стороны BC и $\angle A = 60^\circ$. На стороне AC отмечена такая точка D, что $2DO = BC$. Найдите AD, если $AB = 4$.

   Ответ: 2.

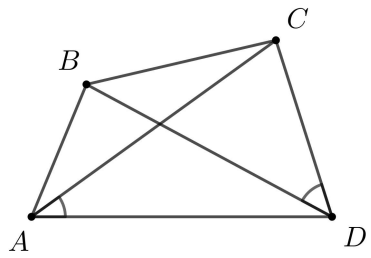
   Решение.



   1) В $\triangle BDC$ медиана DO равна половине стороны BC, значит по признаку этот треугольник прямоугольный, BC — гипотенуза.

   2) В $\triangle BAD$ $\angle A = 60^\circ \Rightarrow \angle ABD = 30^\circ$. Значит, $\triangle BAD$ — прямоугольный с углом 30°, следовательно, по свойству $AD = \frac{1}{2}AB = 2$.

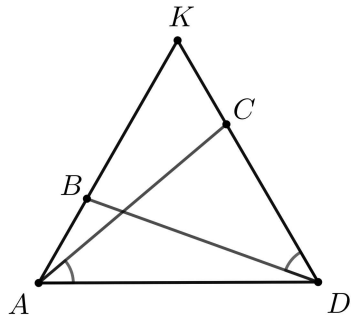
9. На рисунке четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle BDC = \angle CAD$ и $\angle BAD = \angle ADC = 60^\circ$. Найдите длину AD, если известно, что $AB = 4$, $CD = 16$.



   Ответ: $AD = 20$

   Решение.

   Продлим стороны AB и DC так, чтобы они пересеклись в точке K (так как $\angle BAD + \angle ADC \neq 180^\circ$, эти прямые не параллельны).



Тогда в $\triangle ADK$ все углы равны по 60°, и он равносторонний по признаку.

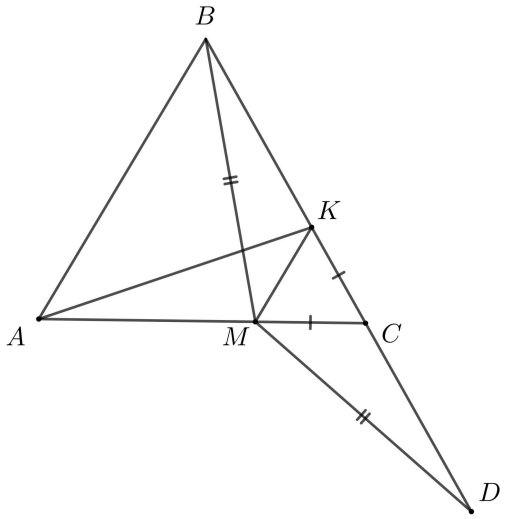
$\triangle ACD = \triangle DKB$ по II признаку ($DK = AD$ по доказанному, $\angle ADC = \angle K$ по доказанному, $\angle CAD = \angle KDB$ по условию).

$KB = CD = 16$ как соответственные стороны, $AK = AB + BK = 20$, $AD = AK = 20$ как стороны равностороннего треугольника.

10. Дан равносторонний треугольник ABC. На продолжении BC за точку C отмечена точка D, а на отрезке AC выбрана точка M так, что $BM = MD$. Докажите, что $AM = CD$.

Решение.

1) Отметим на отрезке BC точку K такую, что $CK = CM$:



2) $\triangle CKM$ - равнобедренный с углом 60°, поэтому он равносторонний, и $KM = CK = CM$.

3) В равнобедренном $\triangle BMD$ $\angle MBD = \angle MDB$ по свойству. $\angle BMK = \angle DMC$ как разность 180° и двух пар равных углов.

4) $\triangle BCM = \triangle MKD$ по I признаку ($\angle BMK = \angle CMD$ по доказанному, $BM = MD$ по условию, $CM = MK$ по доказанному).

Следовательно, $BK = CD$.

5) $AM = AC - CM$; $BK = BC - CK$; $AM = BK$ как разности равных отрезков.

Т. к. $BK = CD$, то и $AM = CD$.