

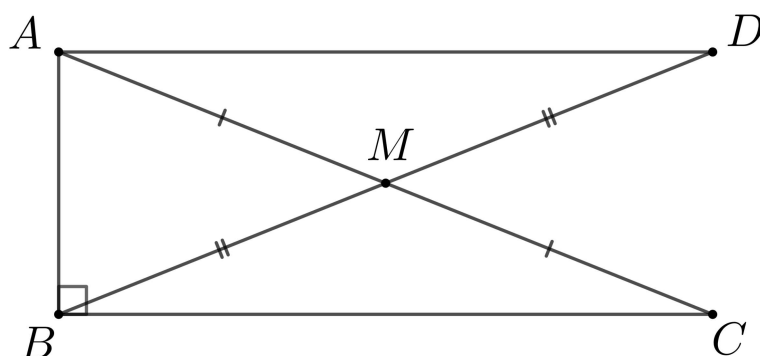
УДВОЕНИЕ МЕДИАНЫ

Классная работа

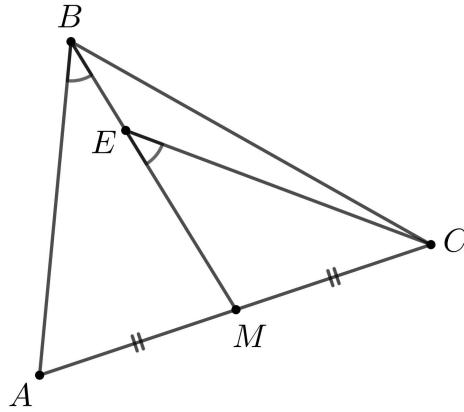
1 Выпишите номера неверных утверждений:

- 1) Если медиана разбивает треугольник на два треугольника с равными периметрами, то исходный треугольник обязательно является равнобедренным.
- 2) Длина любой медианы треугольника всегда меньше его полупериметра.
- 3) В любом треугольнике медиана всегда длиннее высоты, проведённой из той же вершины.
- 4) Три медианы делят треугольник на шесть треугольников, имеющих равные периметры.

2 Докажите свойство медианы прямоугольного треугольника, пользуясь рисунком. Других дополнительных построений (кроме удвоения медианы) делать не нужно:



3 На медиане BM треугольника ABC взяли точку E так, что угол CEM равен углу ABM . Докажите, что отрезок EC равен одной из сторон треугольника.



- 4 В треугольнике ABC провели медиану BM . Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM . Найдите отношение медианы BM к стороне BC .
- 5 В треугольнике ABC медиана BM в 2 раза меньше стороны AB и образует с ней угол 40° . Найдите угол ABC .
- 6 В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD из вершины прямого угла. На сторонах AC и BC отмечены точки E и F соответственно так, что $CE = BF$. Докажите, что треугольник DEF прямоугольный и равнобедренный.

Решения классной работы

1 1) Верно.

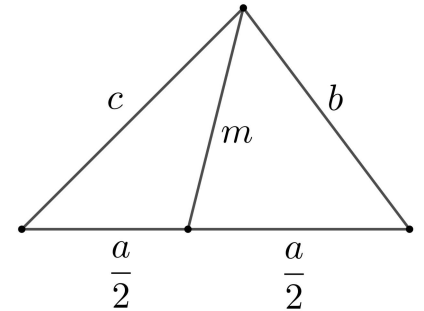
2) Верно. Док-во:

В левом $\triangle m < c + \frac{a}{2}$ (нер-во $\triangle$).

Аналогично в правом $\triangle m < b + \frac{a}{2}$.

Сложим неравенства: $2m < a + b + c \Rightarrow$

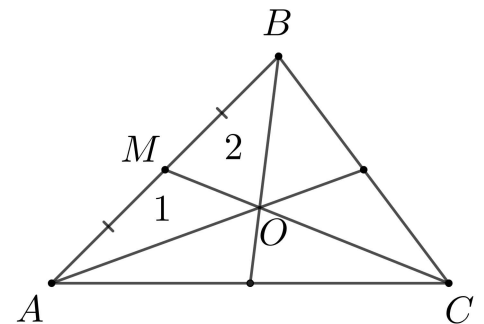
$$m < \frac{P}{2}$$



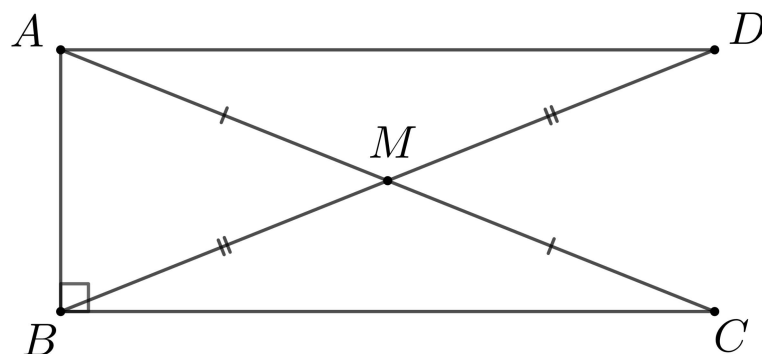
3) Неверно. В прямоугольном треугольнике медиана может совпадать с высотой (и быть равна ей).

4) Неверно. Док-во:

Пусть периметры треугольников 1 и 2 равны. Тогда $AO = OB$. Тогда $\triangle AOB$ р/б и OM — высота. Тогда CM также высота, и $\triangle ABC$ р/б.



2 Доказать, что медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.



1) Удвоим медиану $BM : BM = MD$.

2) $\triangle AMD = \triangle BMC$ по I признаку ($AM = MC$ по условию, $BM = MD$ по построению, $\angle AMD = \angle BMC$ по св-ву вертикальных углов). Следовательно, $AD = BC$ и $\angle C = \angle DAC$ как соответственные элементы.

3) В $\triangle ABC$ $\angle C + \angle BAC = 90^\circ$ по св-ву суммы острых углов прямоугольного треугольника. Так как $\angle C = \angle DAC$, то

$$\angle DAC + \angle BAC = 90^\circ \Rightarrow \angle BAD = 90^\circ$$

4) $\triangle BAD = \triangle ABC$ по двум катетам (AB общий, $AD = BC$ по доказанному). Следовательно, гипотенузы AC и BD равны. Значит,

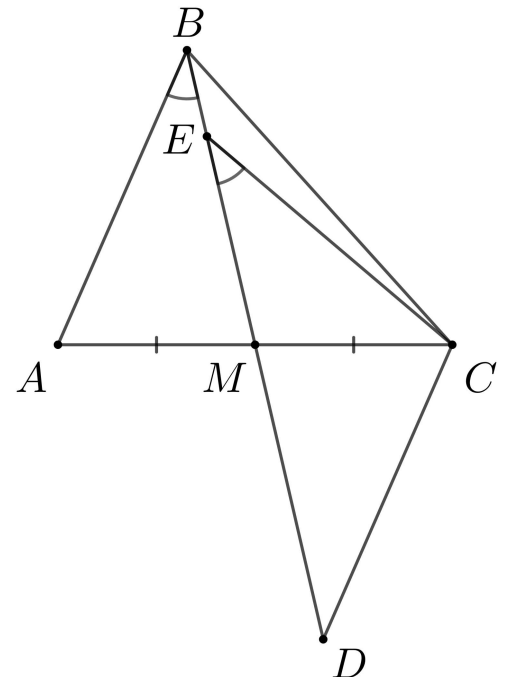
$$BM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$$

3 Доказать, что EC равен одной из сторон треугольника ABC .

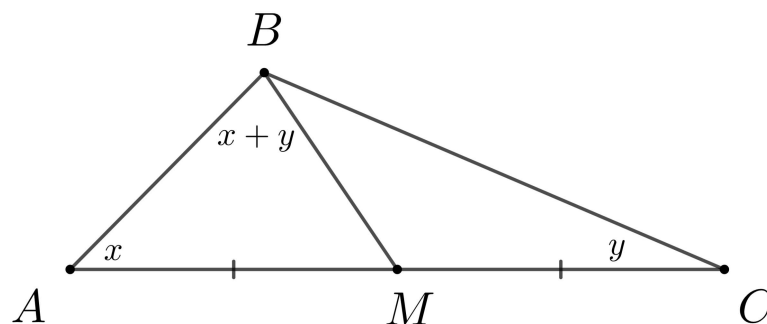
1) Удвоим медиану BM :
так, что $BM = MD$.

2) $\triangle ABM = \triangle MDC$ по I признаку ($AM = MC$ по условию, $BM = MD$ по построению, $\angle AMB = \angle CMD$). Следовательно, $\angle D = \angle ABM$ и $AB = CD$ как соответственные.

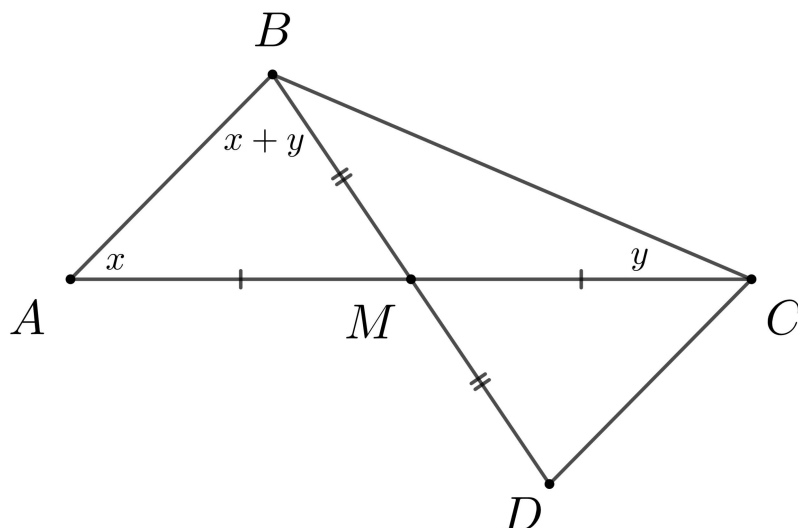
3) $\triangle DCE$ р/б по признаку ($\angle D = \angle ABM$ по доказанному) $\Rightarrow CD = CE \Rightarrow CE = AB$, что и требовалось доказать.



4 Найти $BM : BC$.



1) Удвоим медиану BM так, что $BM = MD$.

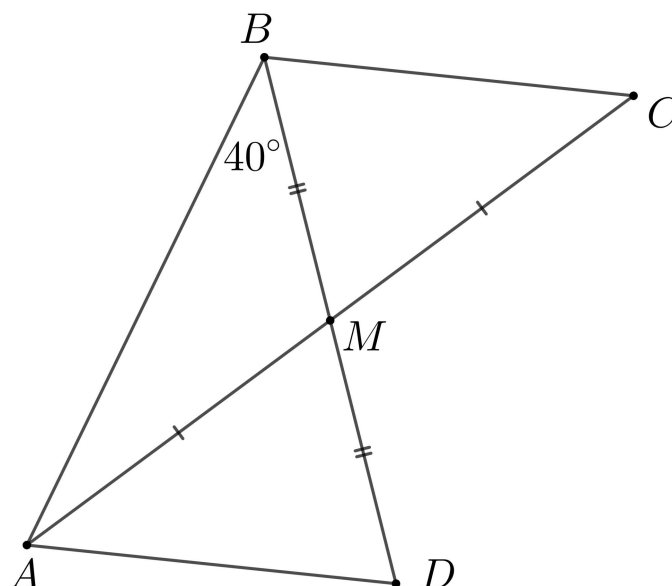


2) $\triangle ABM = \triangle MDC$ по I признаку ($AM = MC$ по условию, $BM = MD$ по построению, $\angle AMB = \angle CMD$). Следовательно, $\angle D = x + y$ и $\angle DCM = x$ как соответственные.

3) В $\triangle BCD$ $\angle D = \angle BCD \Rightarrow$ этот треугольник р/б по признаку и $BD = BC$.

4) $BM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BM : BC = 1 : 2$.

5 BM — медиана, $BM = \frac{1}{2}AB$, $\angle ABM = 40^\circ$. Найти $\angle ABC$.



1) Удвоим медиану BM так, что $BM = MD$. Тогда $BD = BA$ и по св-ву р/б треугольника BDA $\angle D = \angle BAD = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

2) $\triangle BMC = \triangle AMD$ (равенство таких треугольников, получившихся в результате удвоения медианы, доказывалось в двух предыдущих задачах) и $\angle CBD = \angle BDA = 70^\circ$.

3) $\angle ABC = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$.

1) По св-ву углов при основании р/б треугольника ABC $\angle A = \angle B = 45^\circ$.

2) CD — высота р/б треугольника ABC , проведённая к основанию AB , следовательно, по св-ву она является биссектрисой и медианой: $AD = BD$ и $\angle ACD = \angle BCD = 45^\circ$.

3) $\triangle BCD$ р/б по признаку ($\angle B = \angle DCB = 45^\circ$). Следовательно, $BD = CD = AD$.

6 4) $\triangle ADE = \triangle CDF$ по I признаку ($AE = CF$ как разность равных; $AD = CD$ по доказанному; $\angle A = \angle DCF = 45^\circ$). Значит, $DE = DF$ и $\angle ADE = \angle CDF$ как соответственные элементы.

5) $\angle EDC = \angle FDB$ как разность равных углов. Значит, $\angle EDF = 90^\circ$. Равенство $DE = DF$ доказано в предыдущем пункте. Значит, $\triangle DEF$ — прямоугольный равнобедренный, что и требовалось доказать.

