

Иррациональные числа и действия с ними

1 Упростите выражения:

1) $\sqrt{2028}$; 2) $\frac{45}{\sqrt{150}}$; 3) $\sqrt{0,00032}$; 4) $\sqrt{\frac{147}{10}} \cdot \sqrt{\frac{5}{21}}$; 5) $\frac{18}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{2}}$.

2 Упростите выражения:

1) $(\sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{300}) \cdot \sqrt{3}$; 3) $(2\sqrt{7} - 3\sqrt{3})^2$;
2) $(4\sqrt{3} - \sqrt{10})(4\sqrt{3} + \sqrt{10})$; 4) $\sqrt{15} \cdot (\sqrt{60} - \sqrt{135} + \sqrt{240})$.

3 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

1) $\frac{14}{\sqrt{10} - \sqrt{3}}$; 2) $\frac{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$; 3) $\frac{15\sqrt{2} - 10\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

4 Избавьтесь от сложного радикала:

1) $\sqrt{14 - 4\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}$; 7) $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$;
2) $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$; 5) $\sqrt{\frac{17}{4} - \sqrt{13}}$; 8) $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$;
3) $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}}$; 6) $\sqrt{5\sqrt{2} - 7}$; 9) $\sqrt{10 - \sqrt{84}}$.

5 Проверьте справедливость равенств:

1) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} = 2$;
2) $\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (3 + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{2}) = 8$;
3) $\left(\frac{4}{3 - \sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{6 - 5\sqrt{6}}{5 - \sqrt{6}}\right)^2 = 2\sqrt{61 + 24\sqrt{5}}$;
4) $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$;
5) $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$.

6 Найдите значения выражений:

$$1) \sqrt{3 + \sqrt{8 + 2\sqrt{7}}}; \quad 2) \sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}}; \quad 3) \frac{\sqrt{5 + \sqrt{24}}}{\sqrt{5 - \sqrt{24}}};$$

$$4) \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}; \quad 5) \frac{\sqrt{21 + 8\sqrt{5}}}{4 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{9 - 4\sqrt{5}};$$

$$6^*) \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}(5 + 2\sqrt{6})(49 - 20\sqrt{6})}{\sqrt{27} - 3\sqrt{18} + 3\sqrt{12} - \sqrt{8}}.$$

7 Сравните числа:

$$1) \sqrt{31} - \sqrt{28} \vee \sqrt{32} - \sqrt{29};$$

$$2) \sqrt{11} + \sqrt{14} \vee 7;$$

$$3) \sqrt{2026} - \sqrt{2025} \vee \sqrt{2027} - \sqrt{2026};$$

$$4) \sqrt{11 - 4\sqrt{7}} \vee \sqrt{14 - 6\sqrt{5}};$$

$$5) \frac{4}{\sqrt{5} - 1} \vee \sqrt{18}.$$

8 Упростите выражение: $\sqrt{\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \frac{9}{2}}.$

9 (*Всеросс'16*) Существует ли такое натуральное число n , большее 1, что значение выражения $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ является натуральным числом?

10 (*АМС 12, 1983*) Упростите выражение и найдите целую часть:

$$\sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}}$$

11 (*ОММО'16*) Найдите все действительные числа x такие, что оба числа $x + \sqrt{3}$ и $x^2 + \sqrt{3}$ — рациональные.