Теорема синусов. Решения

9 класс. 14 октября 2026 г. Практикум.

Нумерация соответствует листку условий. Повторы № 6 и 7 удалены. Сложные задачи: № 25–27.

№ 1 *

Пусть ABC — прямоугольный треугольник, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $CD = a$ — биссектриса, $D \in AB$. Обозначим $AB = x$. Тогда $AC = \sqrt{3}x/2$, $\angle ACD = 45^\circ$, $\angle ADC = 105^\circ$. По теореме синусов в ACD:

$$a = \frac{AC \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{\sqrt{3}x}{4 \sin 105^\circ}. \qquad \boxed{x = \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{6})a}{3}}.$$

№ 2 *

Обозначим трапецию $ABCD$, где AB — большее основание, $AD = BC = a$, $\angle DAB = 30^\circ$. Высота равна $a/2$. Горизонтальная проекция диагонали BD равна средней линии b, поэтому $BD = \sqrt{b^2 + a^2/4}$. Равнобокая трапеция вписана в окружность. По теореме синусов в ABD:

$$\boxed{R = \frac{BD}{2 \sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}}.$$

№ 3 *

Пусть $AB = 21$, $CD = 9$, $AD = BC$. Проекция боковой стороны на большее основание равна $(21 - 9)/2 = 6$, поэтому $AD = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ и $\sin \angle DAB = 8/10 = 4/5$. Проекция диагонали BD равна $(21 + 9)/2 = 15$, так что $BD = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$. Следовательно,

$$\boxed{R = \frac{BD}{2 \sin \angle DAB} = \frac{85}{8}}.$$

№ 4 *

Пусть $AB = AC$, а D — точка пересечения прямой с основанием BC. Углы ADB и ADC смежные, значит их синусы равны. По расширенной теореме синусов:

$$R_{ABD} = \frac{AB}{2 \sin \angle ADB}, \qquad R_{ACD} = \frac{AC}{2 \sin \angle ADC}.$$

Числители и знаменатели равны, поэтому $\boxed{R_{ABD} = R_{ACD}}$.

№ 5 *

Пусть AD — биссектриса, $D \in BC$. По теореме синусов в треугольниках ABD и ACD:

$$BD = \frac{AB \sin \angle BAD}{\sin \angle ADB}, \qquad DC = \frac{AC \sin \angle CAD}{\sin \angle ADC}.$$

Углы BAD и CAD равны, а углы ADB и ADC смежные. Делением равенств получаем $\boxed{BD/DC = AB/AC}$.

№ 8 *

Общая сторона двух треугольников $AC = 2R_{ABC} \sin \angle ABC$. По теореме синусов в ACD:

$$\boxed{R_{ACD} = R_{ABC} \frac{\sin \angle ABC}{\sin \angle ADC} = 4 \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{6} \text{ см}}.$$

№ 9 *

Аналогично, выражаем общую сторону AC через радиусы двух описанных окружностей:

$$\boxed{R_{ACD} = R_{ABC}\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ADC} = 3\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 3\sqrt{2}\text{ см}}.$$

№ 10 *

Обозначим $\angle ABC = B$. Поскольку O — точка пересечения биссектрис, $\angle AOC = 180^\circ - (\angle A + \angle C)/2 = 90^\circ + B/2$. При этом $AC = 2R_{ABC}\sin B$. Поэтому

$$R_{AOC} = \frac{AC}{2\sin\angle AOC} = R_{ABC}\frac{\sin B}{\cos(B/2)} = 2R_{ABC}\sin(B/2). \qquad \boxed{R_{AOC} = 6\text{ см}}.$$

№ 11 *

Как и в № 10, $\angle AOC = 90^\circ + B/2$ и $R_{AOC} = 2R_{ABC}\sin(B/2)$. Подставляем $B = 90^\circ$, $R_{ABC} = 8$:

$$\boxed{R_{AOC} = 16\sin 45^\circ = 8\sqrt{2}\text{ см}}.$$

№ 12 **

На рисунке $\beta = \angle ABD$, $\gamma = \angle BAC$, $\angle BCD = 90^\circ$. В треугольнике ABD внешний угол BDC равен $\beta + \gamma$. Поэтому $BC = a\tan(\beta + \gamma)$, $AC = BC\cot\gamma$. Следовательно,

$$AD = AC - CD = a\big(\tan(\beta+\gamma)\cot\gamma - 1\big) = \boxed{\frac{a\sin\beta}{\sin\gamma\cos(\beta+\gamma)}}.$$

№ 13 **

Пусть $AC = h$. Из прямоугольных треугольников ABC и ACD получаем $CB = h\cot\alpha$, $CD = h\cot\beta$. Так как $BD = CD - CB = m$,

$$m = h(\cot\beta - \cot\alpha), \qquad \boxed{AC = h = \frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}}.$$

№ 14 **

В ABC имеем $\angle B = 180^\circ - \alpha - \gamma$. По теореме синусов $AC = c\sin(\alpha+\gamma)/\sin\gamma$. Применяя ту же теорему к ACM, находим

$$CM = \frac{AC\sin\alpha}{\sin\varphi} = \boxed{\frac{c\sin\alpha\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma\sin\varphi}}.$$

№ 15 **

В ABC имеем $\angle C = 180^\circ - \alpha - \beta$, поэтому $AB = b\sin(\alpha+\beta)/\sin\beta$. В треугольнике ABM:

$$BM = \frac{AB\sin\alpha}{\sin\varphi} = \boxed{\frac{b\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\sin\varphi}}.$$

№ 16 **

В ABD угол ABD равен β, поэтому $AB = m\sin\varphi/\sin\beta$. В ABC угол C равен $180^\circ - \alpha - \beta$. Следовательно,

$$BC = \frac{AB\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \boxed{\frac{m\sin\alpha\sin\varphi}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}.$$

№ 17 **

По теореме синусов в ADC: $AC = n\sin\varphi/\sin\gamma$. В ABC угол B равен $180^\circ - \alpha - \gamma$, откуда

$$BC = \frac{AC\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)} = \boxed{\frac{n\sin\alpha\sin\varphi}{\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma)}}.$$

№ 18 **

Из $DM \parallel BC$ следует подобие ADM и ABC, поэтому $AM/MC = AD/DB$. По свойству биссектрисы CD отношение $AD/DB = AC/BC$. По теореме синусов $AC/BC = \sin\beta/\sin\alpha$. Следовательно,

$$\frac{a}{CM} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \qquad \boxed{CM = \frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}}.$$

№ 19 **

Подобие ADM и ACB даёт $AM/MB = AD/DC$. По свойству биссектрисы BD имеем $AD/DC = AB/BC$. По теореме синусов $AB/BC = \sin(\alpha+\beta)/\sin\alpha$. Значит,

$$\frac{a}{BM} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}, \qquad \boxed{BM = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}}.$$

№ 20 **

Пусть стороны a, b, c лежат против углов α, β, γ. По теореме синусов $(a,b,c) = k(\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma)$. Из условия $a+b+c = P$ получаем $k = P/(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$. Поэтому

$$\boxed{(a,b,c) = \frac{P(\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma)}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}}.$$

№ 21 **

Обозначим стороны, лежащие против данных углов, через a, b, c. По теореме синусов $(a,b,c) = k(\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma)$. Из $a+b=m$ следует $k = m/(\sin\alpha+\sin\beta)$. Таким образом,

$$\boxed{(a,b,c) = \frac{m(\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma)}{\sin\alpha+\sin\beta}}.$$

№ 22 **

Обозначим большее основание через B, меньшее — b. Угол β понимаем как внутренний угол трапеции при меньшем основании. Высота $h = a\sin\beta$. Разность оснований равна сумме направленных горизонтальных проекций боковых сторон: $B - b = h\cot\alpha - a\cos\beta$. Тогда средняя линия

$$\frac{B+b}{2} = b + \frac{a}{2}(\sin\beta\cot\alpha - \cos\beta) = \boxed{b + \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha}}.$$

№ 23 **

Пусть меньшее основание равно d. Высота трапеции $h = a\sin\beta$. Так как оба угла при большем основании острые, $b - d = h\cot\alpha + a\cos\beta$. Поэтому средняя линия

$$\frac{b+d}{2} = b - \frac{a}{2}(\sin\beta\cot\alpha + \cos\beta) = \boxed{b - \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}}.$$

№ 24 **

Пусть BD — биссектриса, $D \in AC$. В треугольнике BCD имеем $\angle CBD = \beta/2$, $\angle BCD = \gamma$, $\angle BDC = 180^\circ - \gamma - \beta/2$. По теореме синусов:

$$\boxed{BD = \frac{BC \sin\gamma}{\sin\angle BDC} = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\gamma+\beta/2)}}.$$

№ 25 ***

Пусть $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, AD — искомая биссектриса. Тогда $A = 180^\circ - \beta - \gamma$ и $AB = a\sin\gamma/\sin(\beta+\gamma)$. В ABD угол ADB равен $180^\circ - \beta - A/2$, а значит, $\sin\angle ADB = \sin(\beta + A/2) = \cos((\beta-\gamma)/2)$. По теореме синусов:

$$AD = \frac{AB\sin\beta}{\sin\angle ADB} = \boxed{\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}}.$$

№ 26 ***

Пусть AM — медиана. Точка пересечения медиан делит её в отношении $AG : GM = 2 : 1$, поэтому $AM = 3m/2$. Обозначим $AB = x$, $AC = y$. Так как M — середина BC, проекции сторон на прямую AM и перпендикуляр к ней дают

$$x\sin\alpha = y\sin\beta, \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta = 2AM = 3m.$$

Умножаем второе равенство на $\sin\beta$ и используем первое: $x\sin(\alpha+\beta) = 3m\sin\beta$. Аналогично находим y:

$$\boxed{AB = \frac{3m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad AC = \frac{3m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}}.$$

№ 27 ***

Обозначим $AB = x$, $AC = y$. Поскольку M — середина BC, перпендикулярные прямой AM проекции сторон равны по модулю, а сумма их проекций на эту прямую равна $2AM = 2m$:

$$x\sin\alpha = y\sin\beta, \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta = 2m.$$

Умножаем второе равенство на $\sin\beta$ и подставляем первое. Получаем $x\sin(\alpha+\beta) = 2m\sin\beta$; аналогично для y:

$$\boxed{AB = \frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad AC = \frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}}.$$