Тригонометрия. Теория (обновлено 30 октября)

1 Определения для острого угла

В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен α. AB — гипотенуза; BC — противолежащий, AC — прилежащий к углу α катет.

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}, \qquad \cos\alpha = \frac{AC}{AB}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Синус — отношение противолежащего катета к гипотенузе, косинус — прилежащего катета к гипотенузе, тангенс — противолежащего катета к прилежащему.

2 Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Запись $\sin^2\alpha$ означает $(\sin\alpha)^2$. Тангенс определён только при $\cos\alpha \neq 0$.

3 Табличные значения

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не определён

Значения при $0°$ и $90°$ задаются с помощью тригонометрического круга.

4 Синус и косинус суммы

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

5 Синус и косинус двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

6 Синус и косинус половинного угла

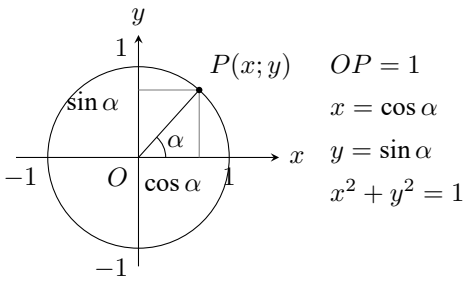
При $0° \leq \alpha \leq 180°$ угол $\alpha/2$ лежит от $0°$ до $90°$, поэтому выбираем неотрицательные корни.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

7 Тригонометрический круг

Тригонометрический круг — единичная окружность с центром в начале координат. Отложим угол α от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. Луч пересечёт окружность в точке $P(x;y)$.

$$\cos\alpha = x, \qquad \sin\alpha = y, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$



Для $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ точка P лежит на верхней полуокружности: $\sin\alpha > 0$. При остром угле $\cos\alpha > 0$, при тупом $\cos\alpha < 0$, при 90° $\cos\alpha = 0$.

8 Формулы приведения через координаты

Пусть α — острый угол и $P = (x;y) = (\cos\alpha; \sin\alpha)$.
$90^\circ - \alpha$: отражение относительно $y = x \longrightarrow (y;x)$.
$90^\circ + \alpha$: поворот на 90° против часовой стрелки $\longrightarrow (-y;x)$.
$180^\circ - \alpha$: отражение относительно оси $Oy \longrightarrow (-x;y)$.

Угол	Синус	Косинус	Тангенс
$90^\circ - \alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
$90^\circ + \alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
$180^\circ - \alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

Например: $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 120^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$.

9 Обобщённая теорема синусов

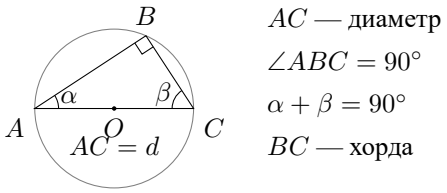
В треугольнике ABC стороны a, b, c лежат напротив углов A, B, C; R — радиус описанной окружности.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

В частности, $a = 2R\sin A$. Отношение стороны к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.

10 Хорда и диаметр

Пусть AC — диаметр окружности, BC — хорда, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle BCA$. По теореме Фалеса угол ABC прямой.



$$BC = d\sin\alpha = 2R\sin\alpha, \qquad BC = d\cos\beta.$$

Синус берём от вписанного угла α, опирающегося на хорду BC. Если дан угол β между самой хордой BC и диаметром CA, используем косинус.

11 Площади

Площадь треугольника через две стороны и угол между ними
Пусть a и b — две стороны треугольника, C — угол между ними.

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

Формула верна для острого, прямого и тупого угла C.

Площадь параллелограмма
Пусть a и b — соседние стороны параллелограмма, α — угол между ними.

$$S = ab\sin\alpha.$$

Площадь четырёхугольника через диагонали
Пусть d_1 и d_2 — диагонали выпуклого четырёхугольника, φ — угол между ними.

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2\sin\varphi.$$

Можно взять любой из двух смежных углов между диагоналями: их синусы равны.

Площадь треугольника через стороны и радиус описанной окружности
Пусть a, b, c — стороны треугольника, R — радиус его описанной окружности.

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Следует из формулы $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ и обобщённой теоремы синусов: $c = 2R\sin C$.

12 Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.
В треугольнике ABC стороны a, b, c лежат напротив углов A, B, C соответственно.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Аналогично для двух других сторон:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B.$$

Если угол C прямой, то $\cos C = 0$ и получается теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$.

13 Длина медианы треугольника

В треугольнике ABC обозначим $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Пусть M — середина стороны BC. Длина медианы AM, проведённой к стороне a:

$$m_a = AM = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Для медиан к сторонам b и c обозначения меняются циклически.

14 Длина биссектрисы треугольника

Пусть AL — биссектриса угла A, $L \in BC$. При тех же обозначениях сторон:

$$l_a = AL = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{bc\big((b+c)^2 - a^2\big)}}{b+c}.$$

Здесь b и c — стороны, образующие угол A, а a — противолежащая ему сторона.