М. А. Волчкевич

ГЕОМЕТРИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ



Учебное пособие

9

ГЕОМЕТРИЯ 9 класс

2021-2022 уч. год

Повторение материала 8 класса

ТЕОРИЯ

1. **Параллелограмм**. Свойства параллелограмма. Признаки параллелограмма.

2. **Прямоугольник**. Свойства прямоугольника. Признаки прямоугольника.

3. **Ромб**. Свойства ромба.

4. **Квадрат**. Свойство квадрата.

5. **Трапеция**. Равнобедренная трапеция. Свойства равнобедренной трапеции.

6. **Средняя линия треугольника**. Средняя линия трапеции. Теорема Вариньона. Теорема о средних линиях четырехугольника. Теорема о медианах треугольника.

7. **Теорема Фалеса**. Теорема о пропорциональных отрезках. Свойство диагоналей трапеции. Свойство биссектрисы треугольника. Обратная теорема о пропорциональных отрезках в треугольнике.

8. **Подобные фигуры**. Признаки подобия треугольников.

9. **Площадь**. Аксиомы площади. Площадь квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника. Свойство медианы треугольника. Площадь ромба, трапеции. Свойство трапеции (крылья бабочки). Признак четырехугольника с параллельными сторонами.

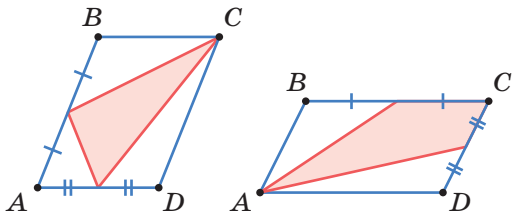
10. Чевиана треугольника. Свойство чевианы. Свойство дельтаплана. Свойство воздушного змея. Отношение площадей треугольников с равными углами. Отношение площадей подобных треугольников.

11. **Теорема Пифагора**. Обратная теорема Пифагора. Свойство высоты прямоугольного треугольника. Свойство четырехугольника с перпендикулярными сторонами.

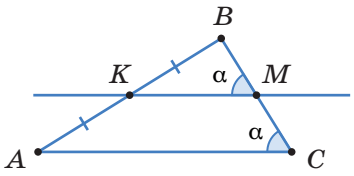
12. **Касательная**. Теорема о касательной. Признак касательной. Свойство отрезков касательных. Свойство центра окружности, вписанной в угол. Свойство четырехугольника, описанного около окружности. Свойства касающихся окружностей. Общие касательные к окружностям.

13. Теорема о **вписанной окружности** треугольника. Формула для отрезков касательных в треугольнике. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник. Свойство многоугольника, описанного около окружности. Теорема о вневписанной окружности треугольника. Свойство вневписанной окружности треугольника. Формула радиуса вневписанной окружности треугольника. Признак описанного четырехугольника.

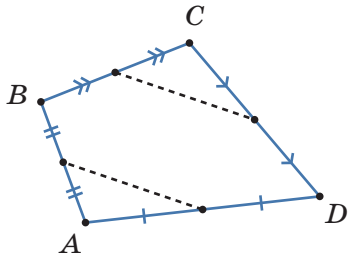
14. Свойство диаметра окружности. Теорема о **вписанном угле**. Свойство углов, опирающихся на одну дугу окружности. Свойство углов вписанного четырехугольника. Свойство угла между касательной и хордой. Признаки вписанного четырехугольника.



▸▸ задача 12



▸▸ задача 14



▸▸ задача 15

ЗАДАЧИ

1. Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки длиной 9 см и 14 см.

2. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $2\angle ADB = \angle A + \angle BDC$. Найдите угол ADB.

3. Периметр ромба равен 8 см, а его высота — 1 см. Найдите углы ромба.

4. Перпендикуляр, опущенный из вершины B прямоугольника $ABCD$ на диагональ AC, делит угол ABC на два угла, величины которых относятся как $1:3$. Найдите угол между проведенным перпендикуляром и диагональю BD.

5. На диагонали AC ромба $ABCD$ отметили точки M и K так, что $AM = CK$. Докажите, что $\angle ABM = \angle CBK$.

6. Боковая сторона AB и меньшее основание BC трапеции $ABCD$ равны соответственно 16 см и 15 см. Какой из отрезков пересекает биссектриса угла BAD — основание BC или боковую сторону CD?

7. Две параллельные прямые пересекают одну из сторон угла с вершиной M в точках A и C, а другую — соответственно в точках B и D. Найдите отрезки MA и MC, если $MB{:}BD = 2{:}3$ и $MA + MC = 14$ см.

8. Медианы AD и BM треугольника ABC пересекаются в точке O. Через точку O проведена прямая, которая параллельна стороне AC и пересекает сторону BC в точке K. Найдите отрезки BD, DK и KC, если $BC = 18$ см.

9. Биссектриса BD треугольника ABC делит сторону AC на отрезки AD и DC, длины которых относятся как $3{:}5$. Найдите стороны AB и BC, если их сумма равна 56 см.

10. Найдите площадь квадрата, диагональ которого равна d.

11. Диагонали равнобокой трапеции являются биссектрисами ее острых углов и точкой пересечения делятся в отношении $5{:}13$. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 90 см.

12. Площадь параллелограмма равна S. Найдите площадь закрашенной фигуры. (▸▸ рис.)

13. В прямоугольной трапеции боковые стороны относятся как $4{:}5$, разность оснований равна 9 см, а меньшая диагональ — 13 см. Найдите площадь трапеции.

14. Докажите, что $BM = MC$. (▸▸ рис.)

15. Точки K, L, M, N — середины сторон четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $KL = NM$. (▸▸ рис.)

16. Диагональ AC делит прямоугольную трапецию $ABCD$ на два треугольника — прямоугольный и равносторонний. Найдите среднюю линию трапеции, если ее меньшее основание равно 12 см.

17. Точка касания вписанной в прямоугольный треугольник окружности делит катет на отрезки 3 см и 12 см. Найдите периметр треугольника.

18. По данным рисунка найдите x. (O — центр окружности) (▸▸ рис.)

19. Вершины четырехугольника $ABCD$ делят окружность в отношении 1:2:5:4. Найдите углы этого четырехугольника.

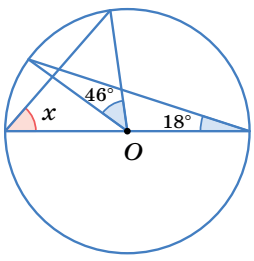
20. В равностороннем треугольнике ABC со стороной, равной 6 см, точки D, E и F — середины сторон AB, BC и AC соответственно. Определите вид четырехугольника $ADEF$ и найдите его периметр.

21. В треугольник вписана окружность. Углы между радиусами окружности, проведенными в точки касания относятся как 2:3:4. Найдите углы треугольника.

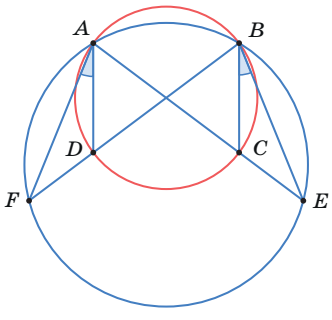
22. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне. Найдите диагональ трапеции, если радиус описанной окружности равен 13 см, а боковая сторона — 10 см.

23. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что середина стороны AC равноудалена от центров этих квадратов.

24. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D такая, что $BD = 9$; $DC = 7$ и $\angle BDA = \angle CAB$. Найдите AB.



▸▸ задача 18



▸▸ задача 28

25. Дан равнобедренный треугольник с вершиной B. Точка M — середина стороны BC. Касательная к описанной окружности треугольника ABM, проведённая в точке B, пересекает продолжение стороны AC (за точку C) в точке E. Докажите, что $AC = CE$.

26. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOD, если площади треугольников AOB, BOC и COD равны соответственно 3, 4 и 5.

27. Докажите, что если касательная к описанной окружности треугольника, проведённая через его вершину, параллельна стороне этого треугольника, то такой треугольник равнобедренный.

28. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Продолжения диагоналей AC и BD пересекают окружность, проходящую через точки A и B, в точках E и F соответственно так, как показано на рисунке. Докажите, что $\angle FAD = \angle CBE$. (▸▸ рис.)

29. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC выбрана точка E, а на продолжении основания AC за точку A выбрана точка D, так что $\angle BDC = \angle ECA$. Докажите, что площади треугольников DEC и ABC равны.

30. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причём $AM = CN$, Q — точка пересечения отрезков AN и CM. Докажите, что DQ — биссектриса угла D.

31. Точки P и Q — середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ соответственно. Оказалось, что $AB = BC$, а точка P лежит на биссектрисе угла B. Докажите, что $BD = 2PQ$.

1
ГЛАВА

Тригонометрия

§1. Тригонометрические функции

§2. Теорема синусов

§3. Теорема косинусов



§1 Тригонометрические функции

Зачем нужны синусы и косинусы?

Древние греки обычный треугольник называли **тригон**, поэтому слово **тригонометрия** с их языка переводится просто как «измерение треугольника». Правда, необходимость таких измерений в первую очередь была связана с астрономией. Даже для того, чтобы знать точное время восхода Солнца в тот или иной день года, требовались специальные вычисления. Современная тригонометрия в первую очередь имеет дело с косинусами, синусами и тангенсами — всех этих понятий греки ещё не знали. Тем не менее греческие астрономы Гиппарх и Птолемей составили подробные таблицы для вычисления хорд, стягивающих различные углы с вершиной в центре окружности: эти таблицы были напрямую связаны с синусами данных углов (рис. 1).

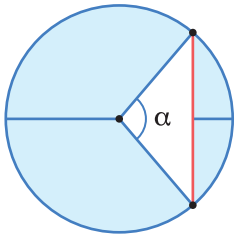


Рис. 1

Слово «синус» возникло в работах индийских астрономов V—VI вв. Они называли его «джива», что означало «тетива», то есть хорда окружности. Арабы стали называть его «джайб», а затем на латынь это перевели как sinus, что значит «изгиб или кривизна»



Так что же такое синус и косинус (их обозначают как $\sin$ и $\cos$) и зачем они нужны? Давайте спустимся с небес на землю и представим себе, что собираемся строить крышу дома. Эта крыша будет иметь наклонные скаты и опираться на стропила — деревянные балки длиной 10 м. Для того чтобы с такой крыши зимой сходил снег, её наклон должен быть не меньше 40°. Возникает естественный вопрос: на сколько метров нужно поднять верхний конец балки над полом чердака, чтобы получить нужный угол ската (рис. 2)? Для этого как раз и нужно знать синус данного угла. Предположим, мы хотим получить угол ската крыши в 42°. Тогда нам нужно будет найти в таблице синусов его значение ($\sin 42° \approx 0{,}67$) и умножить на длину балки. Так мы получим нужную высоту конька крыши: $0{,}67 \cdot 10 = 6{,}7$ м.

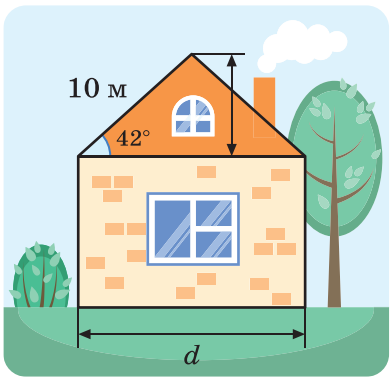


Рис. 2

А как при тех же условиях рассчитать длину d фасада дома? Для этого нужно знать уже косинус угла наклона крыши. В самом деле: по таблице найдём, что $\cos 42° \approx 0{,}74$. Потом умножим его на длину стропил и получим половину длины фасада дома $\frac{1}{2}d$ (рис. 3). Значит, длина всего фасада d будет равна $0{,}74 \cdot 10 \cdot 2 = 14{,}8$ м.

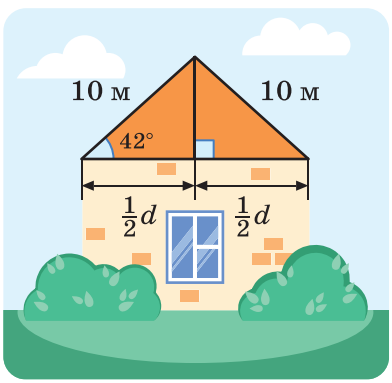


Рис. 3

Или возьмём другой пример. Вы едете на автомобиле по шоссе и видите дорожный знак — он означает крутой подъём (рис. 4). Однако угол наклона дороги на этом знаке почему-то указан не в градусах, а в процентах. Как это понимать? На самом деле так: если вы поедете по такой дороге и переместитесь на 100 м по горизонтали, то по вертикали вы подниметесь на 12 м. То есть на таком знаке пишут отношение высоты, на которую поднимет вас дорога, к вашему перемещению в горизонтальном направлении. Только ставят его в процентах. Можно сказать, что это число равно отношению вертикального и горизонтального катетов прямоугольного треугольника с таким же острым углом, как у дороги. Именно это отношение называют **тангенсом** данного угла.



Рис. 4

Почему же на дорожных знаках отмечают не сам угол наклона дороги, а его тангенс? Зачем так всё усложнять? Дело в том, что при движении автомобиля по склону коэффициент сцепления его колёс с дорогой должен быть больше тангенса угла наклона самой дороги (рис. 5). Для хорошей резины в сухую погоду такой коэффициент примерно равен 0,7. Но начнётся дождь — и этот коэффициент сразу уменьшится до 0,5. А если после дождя подморозит и дорога покроется льдом, то коэффициент сцепления упадёт до 0,1. Другими словами, водителю нужно сразу понимать, сможет ли его машина удержаться на склоне или она покатится вниз и вообще потеряет управление. Вот для этого и ставят такие знаки.

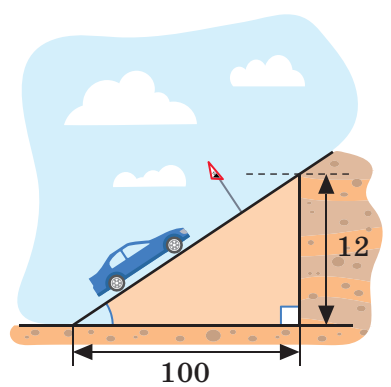
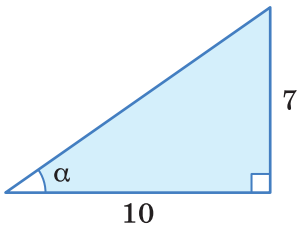


Рис. 5

Знаете, как найти самый большой угол подъёма дороги, на которую обычному автомобилю уже никак не за-

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

браться? Это очень просто: данный угол имеет тангенс, равный коэффициенту сцепления резины колёс автомобиля с сухой дорогой, то есть имеет значение около 0,7. А как узнать величину такого угла в градусах? Для этого нужно построить прямоугольный треугольник, отношение катетов которого равно данному числу. Самое простое — это взять прямоугольный треугольник с катетами 7 и 10 (рис. 6). Сразу видно, что нужный его угол меньше 45°. Если измерить критический угол транспортиром, то у вас получится около 35°. Впрочем, можно обойтись и без транспортира — для тангенсов острых углов, так же как для их синусов или косинусов, давно уже существуют таблицы значений. Вычислить нужный угол можно и на хорошем калькуляторе.



Критический уклон дороги для автомобиля имеет тангенс 0,7,

УПРАЖНЕНИЕ

1. Вы едете по дороге в гололёд и видите перед её подъёмом такой знак. На какие из показанных здесь знаков можно ехать автомобилю (рис. 7)? Сколько примерно градусов составляет в такую погоду критический уклон дороги?



Рис. 7

Тригонометрию нужно знать не только строителям, инженерам или водителям машин, но ещё и астрономам, капитанам кораблей, лётчикам и геодезистам. Дело в том, что наша планета, поверхность её океанов и морей, да и окружающий Землю «купол неба» имеют шарообразную форму. Хотя на небольших участках их можно считать почти плоскими, геометрия на поверхности всего земного шара сильно отличается от плоскости. И расчёты на ней делают в основном с помощью синусов и косинусов. Приведём лишь один пример. Если на земле вы нарисуете прямоугольный треугольник с катетами 3 м и 4 м, то его гипотенуза должна быть равна 5 м по теореме Пифагора. Примерно такие же расчёты для треугольника с катетами 3 км и 4 км дадут правильный ответ 5 км.

А вот если вы захотите вычислить гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 300 км и 400 км, то у вас не получится 500 км (рис. 8)! На практике гипотенуза окажется намного меньше — около 423 км. Почему так будет? Дело в том, что на поверхности шара работает «другая» теорема Пифагора и записывается она уже с помощью тригонометрии. Скажем так: если α, β и γ — это углы, под которыми из центра Земли видны катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника на её поверхности, то $\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta$. Видите, как непросто устроен мир, в котором мы живём!



Рис. 8

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Тригонометрия прямоугольного треугольника

Всю тригонометрию для острых углов можно вывести из прямоугольного треугольника — ведь именно с него она и начиналась. Давайте возьмём прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Пусть в этом треугольнике против катета a лежит острый угол α. Тогда все тригонометрические величины угла α можно записать через отношения сторон данного треугольника.

Синусом острого угла α в прямоугольном треугольнике называют отношение катета, лежащего против этого угла, к гипотенузе.

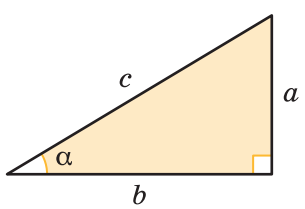
Синус угла α обозначают так: $\sin\alpha$.

Косинусом острого угла α в прямоугольном треугольнике называют отношение прилежащего к этому углу катета к гипотенузе.

Косинус угла α обозначают так: $\cos\alpha$.

Тангенсом острого угла α в прямоугольном треугольнике называют отношение его катетов — противоположного от угла α к прилежащему.

Тангенс угла α обозначают так: $\operatorname{tg}\alpha$.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Мы определили синус, косинус и тангенс для острого угла конкретного прямоугольного треугольника. Тогда возникает вопрос: какими будут их значения в других прямоугольных треугольниках с тем же углом? Ещё важнее понимать, существуют ли синус, косинус и тангенс у самого острого угла, или они могут быть определены только в прямоугольном треугольнике? Скажем прямо: если бы все эти величины существовали только в прямоугольном треугольнике, никакой особой пользы от них бы не было. На наше счастье, синус, косинус и тангенс есть у любого острого угла. Чтобы их определить, достаточно вписать в данный острый угол любой прямоугольный треугольник и уже в этом треугольнике найти нужное отношение сторон (рис. 9).

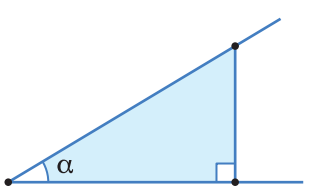


Рис. 9

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

УПРАЖНЕНИЕ

2. Найдите тангенсы углов MEK и ABC, изображённых на клетчатой бумаге (рис. 10).

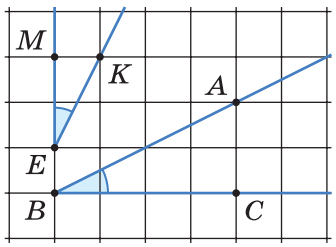
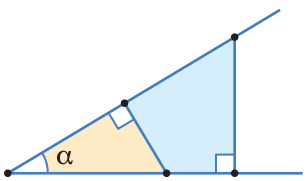


Рис. 10

Почему же отношение сторон прямоугольного треугольника, вписанного в данный острый угол, одинаково для всех треугольников? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

ТЕОРЕМА

Синус, косинус и тангенс острого угла не зависят от выбора прямоугольного треугольника, который вписан в данный угол.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Впишем в данный острый угол с вершиной A и величиной α два различных прямоугольных треугольника ABC и AB_1C_1 (рис. 11).

Эти треугольники имеют общий угол при вершине A и прямые углы при вершинах C и C_1. Значит, они подобны по первому признаку. Следовательно, отношения соответственных сторон в этих треугольниках должны быть равны.

Давайте запишем синус угла α через стороны треугольника ABC: $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$. Если теперь мы запишем синус этого угла для треугольника AB_1C_1, то получим то же самое, поскольку $\sin\alpha = \dfrac{B_1C_1}{AB_1} = \dfrac{BC}{AB}$.

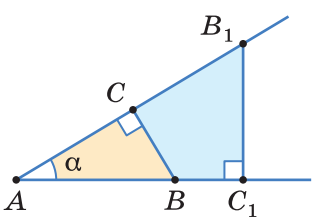


Рис. 11

Совершенно так же можно доказать, что $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ имеют одинаковые значения в треугольниках ABC и AB_1C_1.

Поскольку тригонометрические величины одинаковы для любых двух треугольников, вписанных в данный угол, то они не зависят от выбора такого треугольника.

Что и требовалось доказать.

Итак, значения синуса, косинуса и тангенса острого угла зависят только от величины самого угла. Можно сказать, что для различных углов они являются числовыми функциями этих углов. Чуть позже мы с вами построим графики таких функций.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

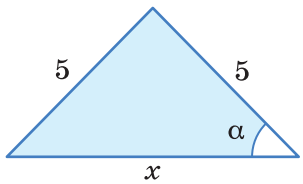


Рис. 12

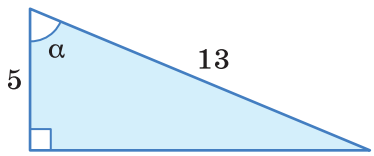


Рис. 13

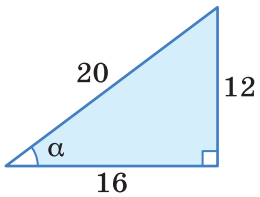


Рис. 14

УПРАЖНЕНИЯ

3. На рисунках 12 и 13 найдите: а) $\cos\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$.

4. Найдите основание треугольника, изображённого на рисунке 14, если $\cos\alpha = 0{,}7$.

5. Найдите синус и косинус угла ABC, изображённого на клетчатой бумаге (рис. 15).

6. Найдите тангенсы углов α и β, изображённых на клетчатой бумаге (рис. 16).

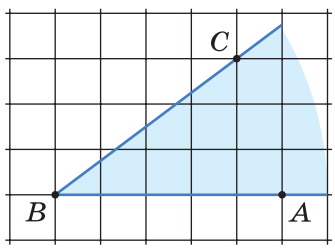


Рис. 15

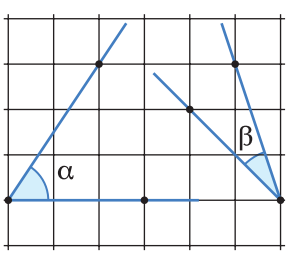


Рис. 16

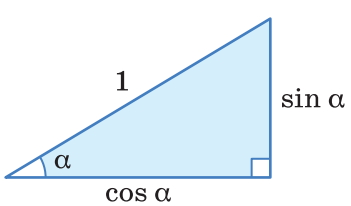
Прямоугольный треугольник с гипотенузой 1

Давайте впишем в острый угол α прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 1. Из определения синуса и косинуса мы сразу получим, что в таком треугольнике против угла α лежит катет с длиной $\sin\alpha$. Тогда другой его катет будет равен $\cos\alpha$.

Значит, синус и косинус острого угла — это катеты одного прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 1. Запишем для этого треугольника теорему Пифагора: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$. Полученное равенство называют **основным тригонометрическим тождеством.**

ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Мы же скажем, что оно представляет собой теорему Пифагора в тригонометрической форме.

☞ Очень важно помнить, что синус и косинус острого угла — это катеты прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 1. Поэтому они не могут быть больше этой гипотенузы, то есть $\sin\alpha \leqslant 1$ и $\cos\alpha \leqslant 1$.

Теперь вспомним, что тангенс острого угла прямоугольного треугольника — это отношение двух его катетов: противоположного к этому углу и прилежащего к нему. Поскольку в нашем треугольнике эти катеты равны $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, то можно написать, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Сделаем ещё одно важное замечание: у прямоугольного треугольника есть второй острый угол — обозначим его величину буквой β. Тогда катеты нашего треугольника можно записать через него так: $\cos\beta$ и $\sin\beta$. Причём катет, противоположный углу β, будет прилегать к углу α и, наоборот. Значит, для острых углов α и β одного прямоугольного треугольника должны выполняться такие равенства: $\sin\beta = \cos\alpha$, $\cos\beta = \sin\alpha$ (рис. 17, *а*, *б*). Если же мы запишем тангенс угла β, то получим

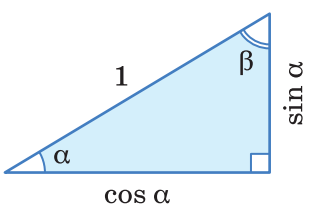
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Такой «перевёрнутый» тангенс, или величина, обратная тангенсу угла, называется **котангенсом** угла, и его записывают так: $\operatorname{ctg}\alpha$. Это позволяет написать, что $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$.

Давайте теперь вспомним, что $\alpha + \beta = 90°$, поэтому $\beta = 90° - \alpha$. Тогда полученные нами соотношения можно представить в другой форме, а запоминают их как **формулы приведения**.

☞ Обратите внимание на букву ***е*** в середине слова *привед**е**ние* — никаких загадочных привидений в тригонометрии нет. А называют эти формулы так, поскольку с их помощью одни тригонометрические функции приводятся к другим.

а)



б)

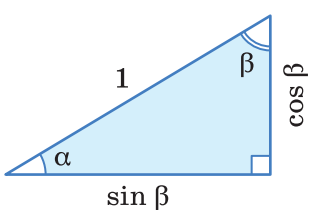
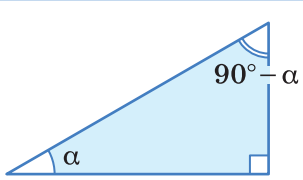


Рис. 17

$$\sin\beta = \cos\alpha$$
$$\cos\beta = \sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$$

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

На что умножать гипотенузу?

На практике для большинства расчётов в треугольниках полезно помнить даже не определения синуса или косинуса угла, а общий принцип, который можно образно назвать так: «На что умножать гипотенузу?»

Рассмотрим два прямоугольных треугольника с одним и тем же острым углом α, гипотенузы которых равны 1 и C (рис. 18, 19).

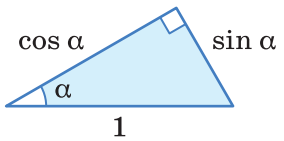


Рис. 18

Эти треугольники подобны по двум углам, поэтому их стороны должны быть пропорциональны. Мы знаем, что у треугольника с гипотенузой 1 катеты равны $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Значит, треугольник с гипотенузой, равной C, будет иметь катеты $C \cdot \sin\alpha$ и $C \cdot \cos\alpha$.

Отсюда и вытекает этот нехитрый принцип:

➤ **чтобы найти катет, противоположный острому углу прямоугольного треугольника, нужно его гипотенузу умножить на синус данного угла;**

➤ **чтобы найти прилежащий катет, гипотенузу нужно умножить на косинус угла.**

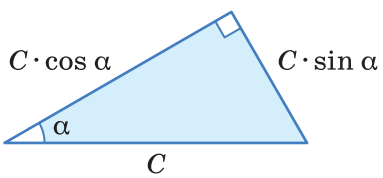


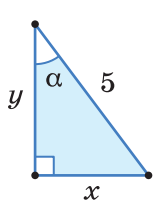
Рис. 19

УПРАЖНЕНИЕ

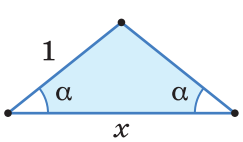
7. Выразите через тригонометрические функции углов α и β отрезки, обозначенные на рисунках буквами x и y (рис. 20, *а*—*з*).

Рис. 20

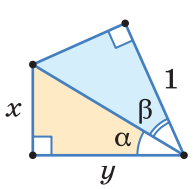
а)



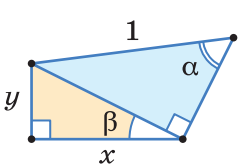
б)



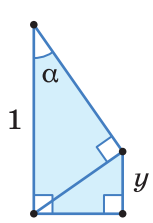
в)



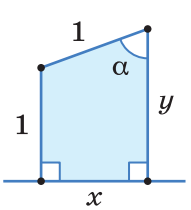
г)



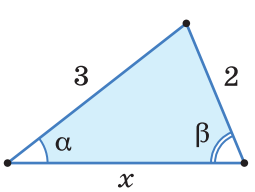
д)



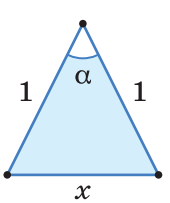
е)



ж)



з)



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Точные значения

Для некоторых острых углов значения синуса, косинуса и тангенса можно вычислить точно. Обычно их записывают в таблицу и запоминают, потому они и называются *табличными*. А чтобы такая таблица не была слишком большой, в ней оставляют только те углы, которые встречаются чаще других. Это углы с величинами 30°, 45° и 60°. К ним мы добавим ещё угол в 90°, хоть он и не является острым: этот угол будет нам нужен, так сказать, для полноты картины. По той же причине мы формально запишем в нашу таблицу значения синуса, косинуса и тангенса для «угла» в 0°. Давайте теперь вычислим тригонометрические величины всех этих углов, а потом поместим их в одну таблицу.

УГЛЫ 30° и 60°

Мы начнём с угла 30°. На самом деле синус этого угла вы уже давно знаете... Можете вы сказать, чему он равен? Не будем спешить, а просто нарисуем прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 1, и острым углом 30° (рис. 21). Все правильно — этот треугольник обладает хорошо известным свойством: его катет, лежащий против данного угла, равен половине гипотенузы! Поэтому $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

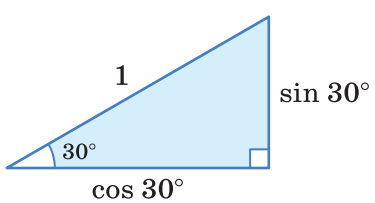


Рис. 21

Второй катет рассматриваемого нами треугольника по определению равен $\cos 30°$. Давайте обозначим его длину буквой x (рис. 22) и запишем для этого треугольника теорему Пифагора: $x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$. Откуда $x^2 = \frac{3}{4}$. Значит, $x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Так мы получим точное значение $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

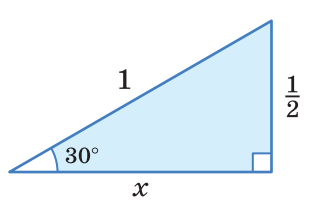


Рис. 22

Тангенс угла 30° равен отношению катетов этого треугольника, поэтому $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Заметим, что второй острый угол нашего прямоугольного треугольника равен $90° - 30° = 60°$ (рис. 23). Поэтому мы можем так же написать, что $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\operatorname{tg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$.

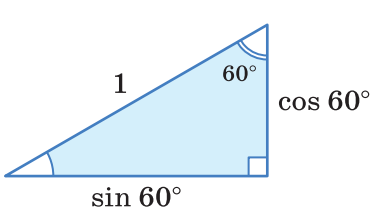


Рис. 23

УГОЛ 45°

Чтобы найти тригонометрические величины угла 45°, рассмотрим прямоугольный треугольник с таким углом и гипотенузой, равной 1. Понятно, что второй острый угол этого треугольника равен $90° - 45° = 45°$.

Значит, данный треугольник будет равнобедренным

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

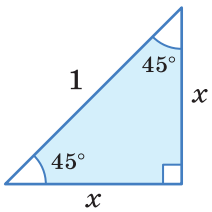


Рис. 24

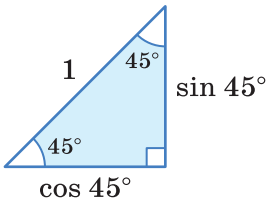


Рис. 25

Чему равен синус, косинус и тангенс меньшего угла египетского треугольника?

по признаку, поэтому мы обозначим его катеты одной буквой x (рис. 24). Запишем для него теорему Пифагора: $x^2 + x^2 = 1$. Откуда $x^2 = \frac{1}{2}$. Поэтому $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Поскольку гипотенуза такого треугольника равна 1, его катеты равны синусу и косинусу угла 45° (рис. 25), то есть $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отношение катетов этого треугольника равно 1, поэтому $\operatorname{tg} 45° = 1$.

УГЛЫ 90° и 0°

Как определить значения синуса или косинуса для угла 90°? Ведь прямоугольного треугольника с двумя прямыми углами нет. А угла с величиной 0° вообще не существует! Всё это так, но мы с вами скоро выясним, что синус, косинус и тангенс можно правильно определить не только для прямого угла, но даже для тупых углов — и чтобы это сделать, вполне достаточно здравого смысла.

Возьмём прямоугольный треугольник ABC, гипотенуза AB которого равна 1. Зафиксируем его вершину A и начнём менять острый угол α при этой вершине (рис. 26). Для удобства будем считать, что катет AC нашего треугольника всё время лежит на горизонтальной прямой.

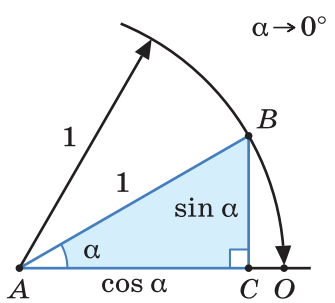


Рис. 26

Если угол α делать всё меньше и меньше, вершина B треугольника по окружности радиуса 1 будет приближаться к точке O, лежащей на луче AC. При этом катет BC этого треугольника тоже будет уменьшаться, пока не станет равен 0. А мы знаем, что его длина равна $\sin\alpha$. Поэтому логично считать, что $\sin 0° = 0$. Вместе с тем катет AC треугольника будет стремиться к отрезку AO, равному 1. Поскольку длина этого катета равна $\cos\alpha$, то естественно положить, что $\cos 0° = 1$.

Примерно так же можно разобрать ситуацию, когда угол α треугольника стремится к 90° (рис. 27). Точка B тогда по окружности будет приближаться к точке H, пока катет BC треугольника ABC не станет равен 1. Следовательно, в этом случае мы получим, что $\sin 90° = 1$. При этом точка C совпадёт с точкой A — и катет AC станет равен 0. Но тогда естественно считать, что $\cos 90° = 0$.

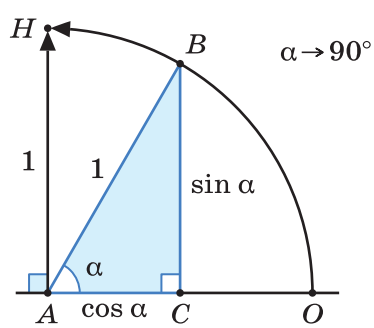


Рис. 27

Тангенс 0° можно получить так же, как и для острого угла, просто разделив синус на косинус. Поэтому

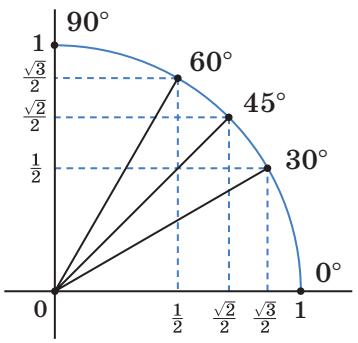
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

$\operatorname{tg} 0° = \sin 0° : \cos 0° = 0 : 1 = 0$.

А вот тангенса угла 90° не существует, ведь на ноль делить нельзя! Поэтому в этой клетке таблицы мы не напишем никакого числа. Поскольку котангенс — это величина, обратная тангенсу, то с ним всё будет наоборот: $\operatorname{ctg} 90° = 0$, а котангенс 0° не будет существовать.

А теперь давайте заполним всю таблицу:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.
$\operatorname{ctg}\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



Обратите внимание: одинаковыми цветами в этой таблице отмечены ячейки, в которых написаны равные числа. С чем это связано? Всё очень просто — любые две такие ячейки соответствуют двум углам, сумма которых равна 90°. А мы знаем, что для таких углов синус и косинус меняются местами, и то же самое происходит с тангенсом и котангенсом.

Вам кажется, что эту таблицу сложно запомнить? На самом деле это совсем не трудно. Например, чтобы запомнить значения синусов всех углов в этой таблице, достаточно уметь считать от нуля до четырёх.

Углы	0°	30°	45°	60°	90°
Пишем числа	0	1	2	3	4
Извлекаем из них корни	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$
Делим пополам — и получаем Значения синусов	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Проверьте, что все значения в последней строке — правильные значения синусов нужных углов! Ну а чтобы запомнить все значения косинусов этих углов, нужно уметь считать в обратном порядке: от четырёх до нуля.

С тангенсами все чуть сложнее — здесь придётся запомнить, что $\operatorname{tg} 45° = 1$, поскольку прямоугольный треугольник с таким углом равнобедренный. А чтобы не перепутать тангенсы углов 30° и 60°, достаточно помнить, что это углы одного прямоугольного треугольника и отношение его катетов всегда равно $\sqrt{3}$. Дальше уже легко: 60° больше 30°, поэтому против большего угла в этом треугольнике лежит катет длины $\sqrt{3}$, а против меньшего — катет длины 1 (рис. 28). Поэтому $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, а $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

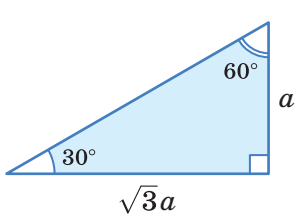


Рис. 28

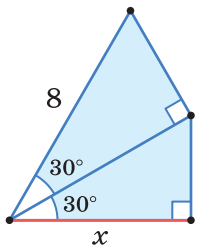
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

УПРАЖНЕНИЕ

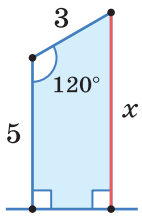
8. Найдите длину отрезка, обозначенного на рисунках буквой x (рис. 29, *а*—*е*).

Рис. 29

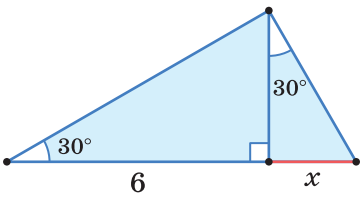
а)



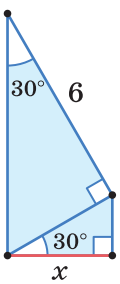
б)



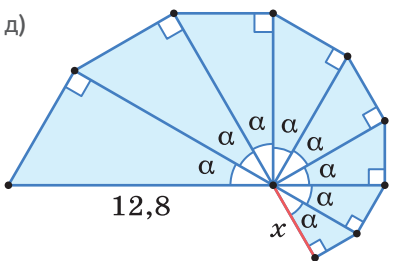
в)



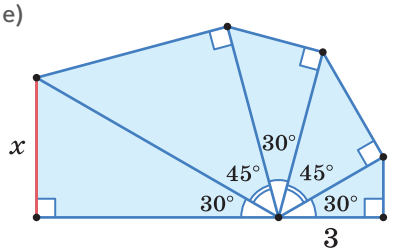
г)



д)



е)



Таблицы

Во времена Античности, а особенно в Средние века астрономам нужно было знать значения синуса, косинуса и тангенса для многих острых углов. Их уже было нельзя вычислить абсолютно точно, поэтому для них составляли специальные тригонометрические таблицы с приближёнными значениями, а потом постоянно их уточняли. Нужны были такие таблицы не только для того, чтобы следить за движением звёзд и планет, но и для ведения календаря, создания правильных солнечных часов, расчётов больших расстояний на земле и в море, для нахождения высоты гор и даже для составления гороскопов. Первые такие таблицы для хорд окружности создали греческие астрономы Гиппарх и Птолемей, потом их уточнили астрономы древней Индии и арабские учёные.

Во многих городах Средней Азии в эпоху Средневековья были возведены обсерватории, и математикой там занимались все образованные люди своего времени. Даже внук жестокого завоевателя Тамерлана Улугбек построил в Самарканде огромную обсерваторию, руководил целой научной школой и лично создал самый точный за несколько веков атлас звёздного неба. Математики Востока вычислили астро-



Памятник астрономам Самарканда

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

номический год с ошибкой всего в одну минуту. Такая точность поражает — ведь все наблюдения они проводили до изобретения телескопа. Выдающиеся учёные арабского мира Аль-Хорезми, Аль-Бируни, Аль-Фергани, Омар Хайям занимались составлением *зиджа*, то есть тригонометрических таблиц. Их усилиями уже в XI веке в Хорезме были получены такие таблицы для всех острых углов, шли они с шагом в четверть одного градуса и имели точность до *кварт*, то есть до четвёртого знака после запятой. Мы приведём здесь лишь небольшую таблицу значений для углов от 1° до 45° с точностью до третьего знака (см. справа на с.17).

Несмотря на то что мы привели таблицу лишь для углов от 1° до 45°, по ней легко можно найти значения синуса, косинуса и тангенса и для других острых углов с величиной в целое число градусов. И для этого нужно помнить только формулы приведения.

А чтобы лучше было видно, как меняются значения синуса, косинуса и тангенса для острых углов, давайте нарисуем графики этих функций (рис. 30, *а*—*в*).



Рейхан Мухаммед ибн Ахмед аль-Бируни (973—1048) — выдающийся учёный Хорезма. Написал трактаты по математике, астрономии, физике и медицине. Вычислил радиус Земли, описал более 800 растений, высказал гипотезу о тяготении небесных тел. Владел санскритом, арабским, персидским и греческим языками.

УПРАЖНЕНИЯ

9. Пользуясь приведённой таблицей (см. с.17), найдите: а) $\sin 50°$; б) $\cos 70°$; в) $\operatorname{tg} 80°$.

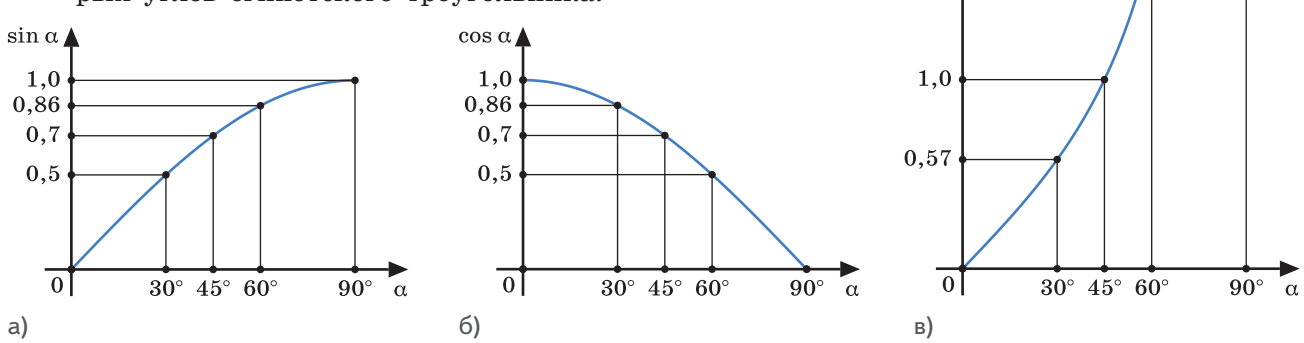
10. Пользуясь приведённой таблицей (см. с.17), найдите угол, у которого: а) косинус равен 0,866; б) синус равен 0,97; в) тангенс равен 2,9.

11. Пользуясь приведённой таблицей (см. с.17), найдите угол, синус которого в два раза больше его косинуса.

12. В полдень заводская труба отбрасывает тень длиной 56 м. Согласно астрономическому справочнику, высота солнца этого дня равна 40°. Найдите высоту трубы.

13. С точностью до одного градуса найдите величину острых углов египетского треугольника.

Рис. 30



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

α	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
sin α	0,017	0,034	0,052	0,069	0,087	0,104	0,122	0,139	0,156	0,173
cos α	0,999	0,999	0,998	0,997	0,996	0,994	0,992	0,990	0,987	0,984
tg α	0,017	0,034	0,052	0,069	0,087	0,105	0,122	0,140	0,158	0,176
ctg α	57,3	28,6	19,1	14,3	11,4	9,51	8,14	7,11	6,31	5,67
α	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
sin α	0,190	0,207	0,225	0,251	0,258	0,275	0,292	0,309	0,325	0,342
cos α	0,981	0,978	0,974	0,970	0,965	0,961	0,956	0,951	0,945	0,939
tg α	0,194	0,212	0,230	0,249	0,267	0,286	0,305	0,324	0,344	0,364
ctg α	5,14	4,70	4,33	4,01	3,73	3,48	3,27	3,07	2,90	2,74
α	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°
sin α	0,358	0,374	0,390	0,406	0,422	0,438	0,454	0,469	0,484	0,500
cos α	0,933	0,927	0,920	0,913	0,906	0,889	0,891	0,882	0,874	0,866
tg α	0,383	0,404	0,424	0,445	0,466	0,487	0,509	0,531	0,554	0,577
ctg α	2,60	2,47	2,35	2,24	2,14	2,05	1,96	1,88	1,80	1,73
α	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°	40°
sin α	0,515	0,529	0,544	0,559	0,573	0,587	0,601	0,615	0,629	0,642
cos α	0,857	0,848	0,838	0,829	0,819	0,809	0,798	0,788	0,777	0,766
tg α	0,600	0,624	0,649	0,674	0,700	0,726	0,753	0,781	0,809	0,839
α	41°	42°	43°	44°	45°					
sin α	0,656	0,669	0,682	0,694	0,707					
cos α	0,754	0,743	0,731	0,719	0,707					
tg α	0,869	0,900	0,932	0,965	1,000					

СИНУС ОДНОГО ГРАДУСА

$\sin 1^\circ$ астрономы вычисляли особо точно. Для этого Аль-Бируни даже решал кубическое уравнение. Так он получил значение $\sin 1^\circ \approx 0{,}017452$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

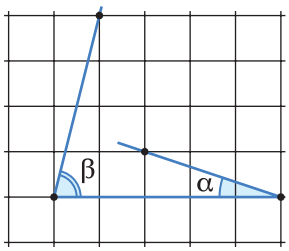


Рис. 31

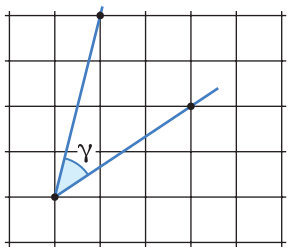


Рис. 32

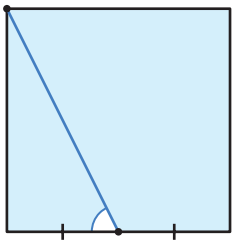


Рис. 33

14. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 10. С точностью до одного градуса найдите величину угла между ними, если основание этого треугольника равно 3,8.

15. Середину стороны квадрата соединили с концом его противоположной стороны. Какой угол получившийся отрезок образует с этой стороной (рис. 31)?

16. Без транспортира с точностью до одного градуса определите величину углов α, β и γ, изображённых на клетчатой бумаге (рис. 32, 33).

17. Этот автомобильный мост в штате Техас США имеет очень крутой подъём (рис. 34). Его высота 54 м, а длина всей конструкции над рекой около 210 м. Найдите угол наклона дорожного полотна этого моста. Какой знак стоял бы перед таким мостом в нашей стране? Почему такие мосты не строят в России?



Рис. 34

18. Под каким углом виден человек двухметрового роста с расстояния 20 м?

19. Ширина футбольных ворот примерно равна 7,3 м, а диаметр стойки 12 см. Под каким углом с 11-метровой отметки видна линия ворот (рис. 35)? Под каким углом из этой точки видна штанга: больше он или меньше 1°?



Рис. 35

20. Гениальный русский учёный-химик Дмитрий Иванович Менделеев 7 августа 1887 года в одиночку совершил полёт на воздушном шаре «Русский» диаметром 11 м для наблюдения полного солнечного затмения. Шар поднялся выше облаков на высоту 3500 м, а при спуске крестьяне с земли сначала приняли его за немецкого шпиона. Один из них даже погрозил ему кулаком. На какой высоте над деревней Спас-Угол находился в этот момент воздушный шар Менделеева, если кулак крестьянина полностью заслонил его на небе? Известно, что кулак вытянутой руки виден самим человеком под углом около 10° (рис. 36).

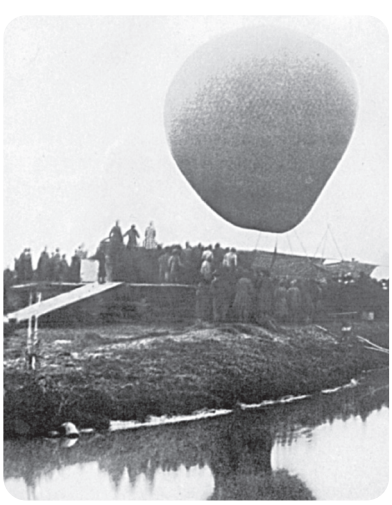


Рис. 36
Воздушный шар «Русский», на котором Д. И. Менделеев наблюдал солнечное затмение

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Тригонометрические формулы

Как изменится синус или косинус угла, если этот угол увеличить в два или три раза? Думаете, что они тоже увеличатся в такое же число раз? К сожалению, всё гораздо сложнее. А чему равен косинус суммы двух углов? Вы уже догадываетесь: он вовсе не равен сумме их косинусов... Как же тогда быть? Для этого и существуют формулы тригонометрии: они подобны законам, которые управляют миром этих функций.

В тригонометрии формул много, но несколько самых важных из них мы сейчас получим геометрически. Правда, докажем эти формулы пока для случая, когда все входящие в них углы будут острыми. Просто потому, что при доказательствах мы будем рассматривать прямоугольные треугольники с этими углами. И начнём с формулы синуса двойного угла.

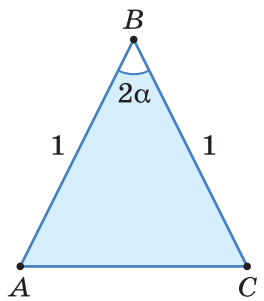


Рис. 37

СИНУС ДВОЙНОГО УГЛА

Возьмём равнобедренный треугольник ABC, у которого угол между боковыми сторонами равен 2α. Пусть длины этих его сторон равны 1. Мы выразим $\sin 2\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, и полученное выражение как раз будет формулой для синуса двойного угла.

Как на данном чертеже (рис. 37) увидеть $\sin 2\alpha$? Опустим высоту AK на боковую сторону BC нашего треугольника (рис. 38). Тогда мы получим прямоугольный треугольник ABK, гипотенуза которого равна 1. Значит, по определению его катет AK будет равен $\sin 2\alpha$.

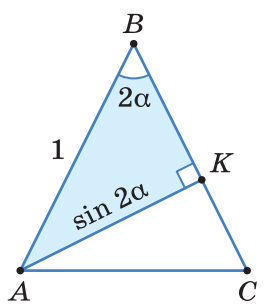


Рис. 38

Теперь опустим высоту BH на основание треугольника ABC (рис. 39). Поскольку он равнобедренный, эта высота будет также его медианой и биссектрисой. Значит, она разделит треугольник ABC на два прямоугольных треугольника с острыми углами α. Посмотрите на треугольник ABH: он имеет острый угол α, а его гипотенуза равна 1, поэтому его катеты AH и BH имеют соответственно длины $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Отсюда сразу следует, что $AC = 2\sin\alpha$.

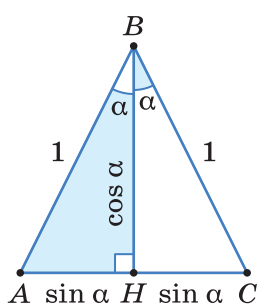


Рис. 39

Нужная нам формула синуса двойного угла получится, если мы запишем площадь треугольника ABC двумя способами.

С одной стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AK \cdot BC = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2}BH \cdot AC = \frac{1}{2}\cos\alpha \cdot 2\sin\alpha$.

Так как площадь треугольника не зависит от способа её вычисления, то должно выполняться равенство: $\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha \cdot 2\sin\alpha$.

Откуда следует, что $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$. Это и есть искомая формула синуса двойного угла.

ФОРМУЛА СИНУСА ДВОЙНОГО УГЛА

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

УПРАЖНЕНИЯ

21. Проверьте с помощью формулы синуса двойного угла:
а) $\sin 60° = 2\sin 30° \cdot \cos 30°$;
б) $\sin 90° = 2\sin 45° \cdot \cos 45°$;
в) $\sin 40° = 2\sin 20° \cdot \cos 20°$.

22. Найдите в таблице значения $\sin 15°$ и $\cos 15°$. Проверьте, что произведение этих значений чуть меньше 0,25. Чему равно точное значение произведения $\sin 15° \cdot \cos 15°$? С чем это связано?

КОСИНУС ДВОЙНОГО УГЛА

Формулу косинуса двойного угла можно получить из того же равнобедренного треугольника ABC, боковые стороны которого равны 1, а угол между ними равен 2α. Снова проведём в этом треугольнике высоты AK и BH. Величину угла CAK обозначим как β, а угол самого треугольника при вершине C — как γ (рис. 40).

Запишем сумму острых углов прямоугольного треугольника CBH: $\alpha + \gamma = 90°$. То же самое можно записать для треугольника ACK: $\beta + \gamma = 90°$. Отсюда следует, что $\beta + \gamma = \alpha + \gamma$, поэтому $\beta = \alpha$.

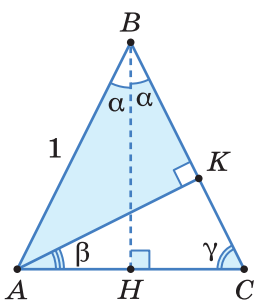


Рис. 40

Рассмотрим треугольник ACK. Его угол при вершине A равен α, а гипотенуза AC равна $2\sin\alpha$ по доказанному выше. Поэтому катет CK этого треугольника можно выразить через угол α: $CK = AC \cdot \sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \sin\alpha = 2\sin^2\alpha$.

А теперь посмотрите на треугольник ABK. Его гипотенуза равна 1, а острый угол при вершине B равен 2α. Значит, прилежащий к этому углу катет BK равен $\cos 2\alpha$ (рис. 41). Поскольку $BC = 1$, то можно записать, что $BK + CK = 1$.

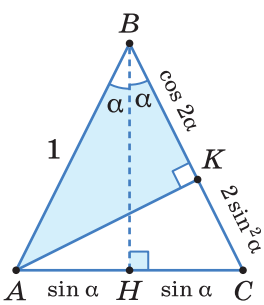


Рис. 41

Это значит, что $\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1$. Данное равенство — одна из формул косинуса двойного угла. Но давайте немного упростим его. Вспомним основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и подставим его в полученную нами формулу: $\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

Теперь приведём подобные слагаемые и получим, что $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Эта формула похожа на основное тригонометрическое тождество и легко запоминается.

Считается, что формулу косинуса двойного угла впервые получил индийский математик Варахамихира в VI в.

Из формулы косинуса двойного угла можно легко получить другую важную **формулу синуса половинного угла:**

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

ФОРМУЛА КОСИНУСА ДВОЙНОГО УГЛА

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Этой формулой постоянно пользовались арабские математики при составлении своих таблиц для синусов и косинусов всех острых углов с шагом в одну угловую минуту.

УПРАЖНЕНИЯ

23. Докажите формулу синуса половинного угла.

24. Проверьте верность данных равенств с помощью формулы косинуса двойного угла:
а) $\cos 60° = \cos^2 30° - \sin^2 30°$;
б) $\cos 90° = \cos^2 45° - \sin^2 45°$;
в) $\cos 40° = \cos^2 20° - \sin^2 20°$.

СИНУС И КОСИНУС СУММЫ ДВУХ УГЛОВ

Синус и косинус суммы двух углов можно выразить через косинусы и синусы этих углов с помощью таких формул:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Доказать эти формулы для углов α и β, сумма которых меньше 90°, можно с помощью рисунка 42. На нём прямоугольник $ABCD$ разбит на четыре прямоугольных треугольника. Величины углов MAK и KAD на этом рисунке соответственно обозначены как α и β, а отрезок AM равен 1. Каждое из слагаемых, входящих в обе формулы, равно одному из отрезков на данном чертеже. Проверьте, что угол CKM на этом рисунке равен β.

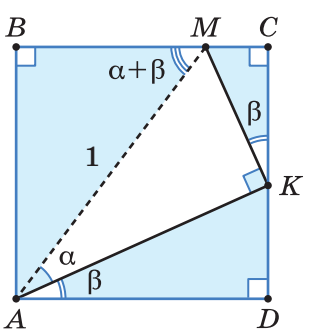


Рис. 42

УПРАЖНЕНИЯ

25. Найдите на рисунке 43 длину отрезков: а) AK и MK; б) AB и BM; в) AD и KD; г) CM и CK.

26. Докажите формулу синуса суммы двух углов.

27. Докажите формулу косинуса суммы двух углов.

28. Используя значения синуса и косинуса углов 30° и 60°, проверьте равенства:
а) $\sin 90° = \sin 60° \cdot \cos 30° + \cos 60° \cdot \sin 30°$;
б) $\cos 90° = \cos 60° \cdot \cos 30° - \sin 60° \cdot \sin 30°$.

29. Найдите точные значения: а) $\sin 75°$; б) $\cos 15°$. Сравните их с приближёнными значениями в таблице.

?

Верно ли, что
$4\cos^3 20° - 3\cos 20° = 0{,}5$?

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Тригонометрический круг

Как можно определить синус, косинус и тангенс тупого угла? Ведь такой угол не может быть углом прямоугольного треугольника. До определённого времени так и было — все тригонометрические величины считали только для острых углов. Если же на чертеже возникал тупой угол, то расчёты вместо него проводили для смежного с ним угла и таким образом сводили задачу опять к острому углу. В результате все тригонометрические формулы и даже некоторые теоремы геометрии были двух типов: для острых и для тупых углов. Конечно, это было очень неудобно. Так продолжалось до XVIII века, пока Леонард Эйлер не придумал **тригонометрический круг**.

Этот круг имеет радиус 1, а центр в точке O — начале координат Oxy. На нём можно найти синус, косинус или тангенс любого угла — острого или тупого. Для этого нужный угол откладывают от луча OA, который служит осью Ox. Таким образом, одна сторона угла совпадает с этой осью, и точка A служит началом отсчёта углов на окружности (рис. 43).

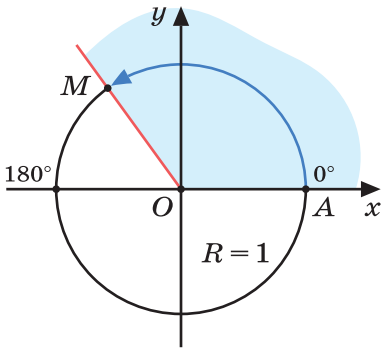


Рис. 43

Другая сторона угла пересекает окружность в некоторой точке M — на рисунке вы можете видеть, как на ней отложен угол AOM с величиной α. Математики договорились, что для всех $\alpha < 180°$ углы нужно откладывать в верхнюю полуплоскость относительно прямой Ox. Поэтому при увеличении α радиус OM данной окружности будет как бы поворачиваться против часовой стрелки.

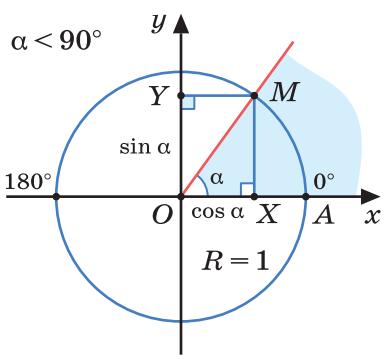


Рис. 44

Сначала рассмотрим случай, когда угол $\alpha < 90°$. Опустим из точки M перпендикуляры MX и MY на оси координат — тогда мы получим прямоугольник $OXMY$ (рис. 44). Его стороны будут иметь длины $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, поскольку они равны катетам прямоугольного треугольника OMX с гипотенузой 1 и острым углом α. Значит, расстояние от точки M до вертикальной оси координат будет равно $\cos\alpha$, а до горизонтальной оно равно $\sin\alpha$. То есть $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ — это координаты точки M по данным осям (рис. 45). Итак, при $\alpha < 90°$ значения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ положительны и совпадают с координатами точки M на окружности. Обычно это записывают так: $M(\cos\alpha; \sin\alpha)$.

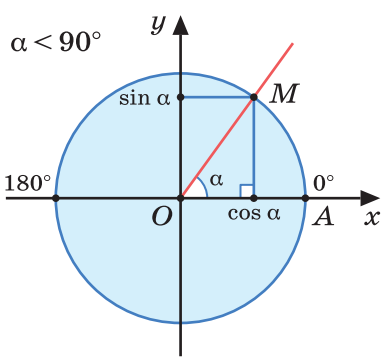


Рис. 45

Что изменится, когда угол α станет тупым? Вписать такой угол в прямоугольный треугольник уже нельзя, поэтому Эйлер предложил определить $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ по аналогии с острыми углами, как координаты точки M на окружности (рис. 46). Синус и косинус тогда будут положительными или отрицательными в зависимости от того, где окажется на этой окружности точка M для данного угла α. Например, для $90° < \alpha < 180°$ мы получим, что $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$.

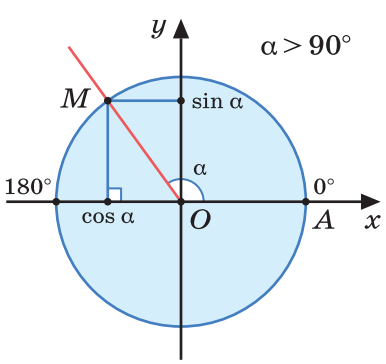


Рис. 46

Можно доказать, что при таком определении синуса и косинуса теоремы геометрии формулируются одинаково

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

для острых и тупых углов, а все формулы тригонометрии становятся универсальными. Причём они останутся такими даже для углов, которые больше 180°. Интересно, что по аналогии можно определить синус, косинус и тангенс даже для углов, больших 360°. Конечно, это будут уже не совсем геометрические углы, и о них вы узнаете на уроках алгебры в 10 классе.

Тригонометрическим кругом пользоваться очень удобно. Для начала с его помощью найдём значения синуса и косинуса углов 0°, 90° и 180°. Отметим для каждого из них свою точку на окружности (рис. 47): для угла 0° это будет точка A, для угла 90° — точка B и для угла 180° — точка C. Мы просто запишем координаты каждой из этих точек — они и будут значениями косинусов и синусов соответствующих им углов.

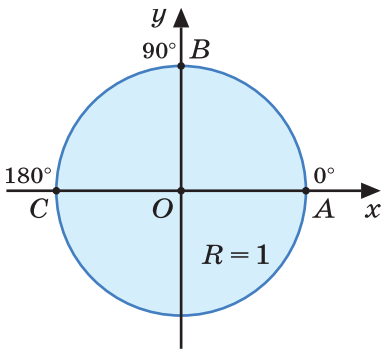


Рис. 47

Поскольку радиус окружности равен 1, для точки A мы получим координаты (1; 0). Это значит, что $\cos 0° = 1$, $\sin 0° = 0$. Точка B имеет координаты (0; 1), поэтому $\cos 90° = 0$, $\sin 90° = 1$. Как вы видите, эти значения совпадают с теми, которые мы с вами уже записали в таблицу. Точка C имеет координаты (–1; 0). И это значит, что $\cos 180° = -1$, $\sin 180° = 0$.

Расстояние от точки окружности до любого её диаметра не превышает радиуса этой окружности. Поскольку синус и косинус угла — это координаты точки на окружности радиуса 1, то для любого угла α должны выполняться неравенства: $-1 \leqslant \sin\alpha$, $\cos\alpha \leqslant 1$.

$$|\sin\alpha|,\ |\cos\alpha| \leqslant 1$$

УПРАЖНЕНИЯ

30. На тригонометрическом круге (рис. 48) отметили 6 точек. В таблицу записали соответствующие этим точкам углы и значения их синуса и косинуса. Какие числа нужно поставить в пустые клетки этой таблицы?

Точка	A	B	C	D	E	F
Угол α	150°	135°	120°			
$\sin\alpha$	0,5				$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\cos\alpha$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0,5		0,8

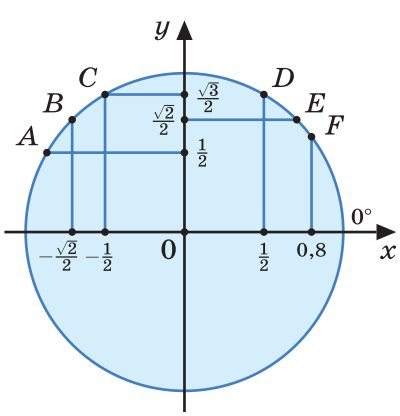


Рис. 48

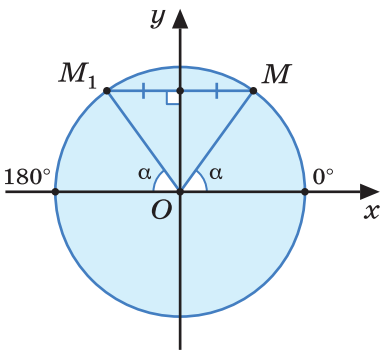
31. Отметьте точки на тригонометрическом круге, для которых сумма синуса и косинуса соответствующего им угла равна нулю. Сколько всего будет таких точек?

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Симметричные точки на тригонометрическом круге

Для каких ещё тупых углов можно точно вычислить значения их синуса и косинуса? На самом деле все такие углы прямо связаны с таблицей, которую мы с вами заполняли для острых углов. И понять нам это поможет простое соображение:

углы с величинами α и $180° - \alpha$ на тригонометрическом круге расположены симметрично относительно оси Oy.



В самом деле, возьмём на тригонометрической окружности с диаметром AC любые две точки M и M_1, для которых углы AOM и AOM_1 равны α и $180° - \alpha$ (рис. 49). Тогда угол COM_1 будет равен $180° - (180° - \alpha) = \alpha$.

Опустим из точек M и M_1 перпендикуляры MX и M_1X_1 на ось Ox. Тогда прямоугольные треугольники OMX и OM_1X_1 будут равны по гипотенузе и острому углу α. Значит, будут равны их катеты MX и M_1X_1. Поэтому расстояния от точек M и M_1 до горизонтальной оси одинаковы и хорда MM_1 параллельна диаметру AC. Что это значит? Только то, что координаты точек M и M_1 по оси Oy одинаковы. Вертикальная координата точки на тригонометрической окружности равна синусу её угла, поэтому должно выполняться равенство $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

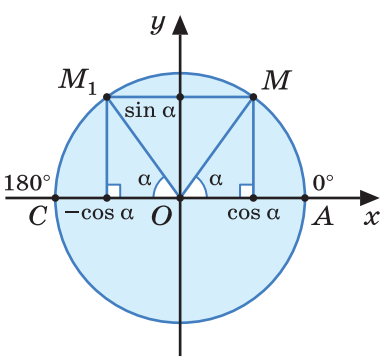


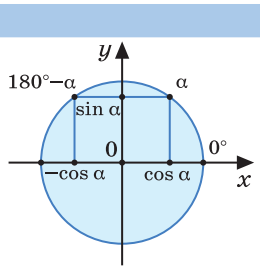
Рис. 49

Из равенства тех же прямоугольных треугольников следует, что $OX_1 = OX$. Значит, на горизонтальной оси точки X и X_1 находятся на равных расстояниях от нуля, но по разные стороны от него. Следовательно, координаты этих точек — противоположные числа. А координата по горизонтали точки на тригонометрической окружности равна косинусу её угла. Поэтому должно выполняться равенствоcos$(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Итак, для острых углов α мы доказали два равенства, которые также называют **формулами приведения**. Можно доказать, что эти формулы универсальны, то есть верны для любых углов. Мы запишем их ещё раз:

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Давайте использовать эти формулы для вычисления значений синуса и косинуса тупых углов. Возьмём, например, угол с величиной 120°. Поскольку 180° – 120° = 60°, то на тригонометрическом круге углам 120° и 60° соответствуют две точки, симметричные относительно вертикальной оси (рис. 50). Поэтому $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

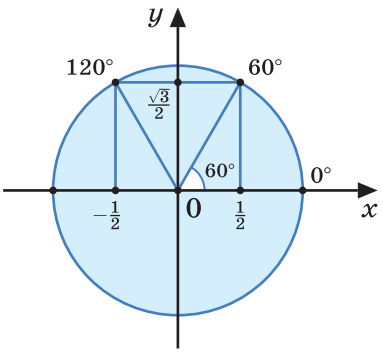


Рис. 50

УПРАЖНЕНИЯ

32. Запишите значения синусов и косинусов тупых углов в таблицу:

α	90°	120°	135°	150°	180°
sin α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$			0
cos α	0				–1

33. Пользуясь тригонометрическим кругом, найдите синус и косинус точек M и K на рисунке 51.

34. Пользуясь тригонометрическим кругом, для острого угла α докажите равенство $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$.

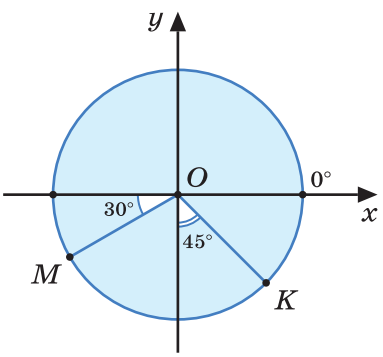


Рис. 51

Ось тангенсов

Как вычислить тангенс данного угла α с помощью тригонометрического круга? Можно было бы сначала найти координаты sin α и cos α соответствующей этому углу точки M на окружности, а потом воспользоваться известной вам формулой $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Но тангенс нужного угла на тригонометрическом круге легко можно найти и геометрически.

Давайте проведём касательную к данному кругу в точке A — эту прямую называют **осью тангенсов** и находят на ней тангенсы всех углов. Точка A на ней соответствует нулю: выше неё на этой оси находятся положительные значения тангенса, ниже — отрицательные.

Возьмём на окружности точку M так, что угол AOM равен α, и проведём прямую OM до пересечения с данной касательной в точке T.

Мы сначала разберём случай, когда $\alpha < 90^\circ$. Посмотрите на треугольник AOT (рис. 52). Он прямоугольный, поскольку касательная перпендикулярна радиусу окружности. Острый угол AOT этого треугольника равен α. По определению в этом треугольнике $\frac{AT}{OA} = \operatorname{tg}\alpha$. Поскольку $OA = 1$,

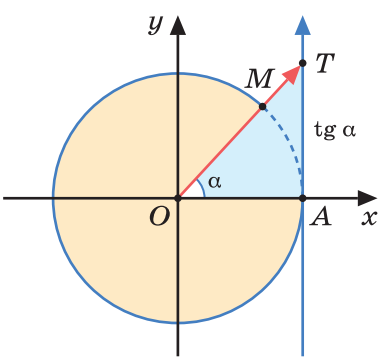


Рис. 52

Слово «тангенс» произошло от латинского слова tangens, что значит «касающийся». Это вполне естественно, ведь ось тангенсов — это касательная к тригонометрическому кругу.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

то $\operatorname{tg}\alpha = AT$. Поэтому точка T на оси показывает значение $\operatorname{tg}\alpha$.

Теперь разберём случай тупого угла α. Снова отметим на окружности точку M, чтобы угол $AOM = \alpha$. Оказывается, $\operatorname{tg}\alpha$ можно найти тем же способом: достаточно провести прямую MO до пересечения с осью тангенсов в точке T. Теперь на оси она будет находиться ниже нуля, и значение тангенса получится отрицательным (рис. 53).

Почему так будет? Чтобы это объяснить, отметим на окружности точку M_1, симметричную точке M относительно оси Oy. Как мы знаем, угол AOM_1 будет равен $180° - \alpha$. И тому же будет равен угол AOT.

Поэтому треугольники AOT и AOT_1 будут равны по стороне и двум углам. Откуда $AT = AT_1$.

Значит, длина отрезка AT равна $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$. Из формул приведения следует, что $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Поэтому $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \dfrac{\sin\alpha}{(-\cos\alpha)} = -\operatorname{tg}\alpha$. То есть значение тангенса для тупого угла α должно быть отрицательным. Поэтому логично числа на оси тангенсов, находящиеся ниже точки A, считать отрицательными. Собственно, так и делают, поэтому точка T на этой оси и даёт правильное значение тангенса α для любых углов.

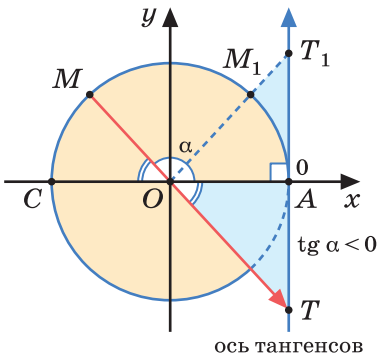


Рис. 53

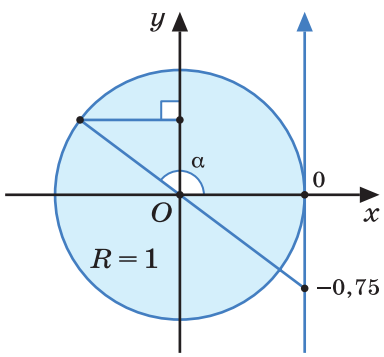


Рис. 54

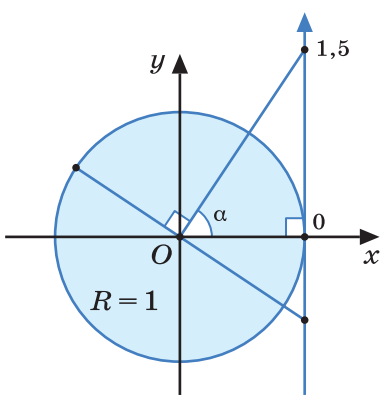


Рис. 55

УПРАЖНЕНИЯ

35. Найдите значения $\operatorname{tg}120°$, $\operatorname{tg}135°$ и $\operatorname{tg}150°$.

36. Тангенс тупого угла α равен $-0{,}75$. Пользуясь тригонометрическим кругом, найдите $\sin\alpha$ (рис. 54).

37. Тангенс острого угла α равен 1,5. Пользуясь тригонометрическим кругом, найдите $\operatorname{tg}(90° + \alpha)$ (рис. 55).

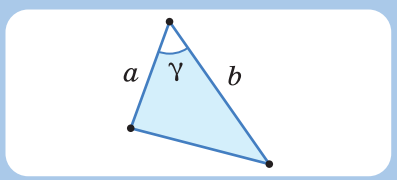
Формула площади треугольника

Как известно, два треугольника равны по признаку, если они имеют две соответственно равные стороны и угол между ними. Значит, любой треугольник однозначно определяется двумя сторонами и углом между ними. Но тогда эти элементы однозначно определяют и его площадь. Поэтому следует ожидать, что есть формула, выражающая площадь треугольника через эти элементы. Мы увидим, что такая формула существует и в неё входит синус угла треугольника.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.



$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть длины двух сторон треугольника ABC равны a и b, а угол между ними имеет величину γ. Опустим высоту BH на сторону AC данного треугольника и обозначим её длину как h (рис. 56). Площадь треугольника ABC можно записать по известной формуле $S = \frac{h \cdot b}{2}$.

Выразим высоту h через угол γ.

Сначала разберём случай, когда $\gamma < 90°$. Тогда острый угол прямоугольного треугольника BCH будет равен γ. Поскольку длина гипотенузы BC равна a, то по определению $h = a \cdot \sin\gamma$.

В случае, когда $\gamma > 90°$, основание высоты BH лежит на продолжении стороны AC треугольника ABC. Тогда острый угол BCH будет равен $180° - \gamma$ (рис. 57). Из того же прямоугольного треугольника следует, что $h = a \cdot \sin(180° - \gamma)$. По формуле приведения $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$. Значит, и в этом случае мы получим, что $h = a \cdot \sin\gamma$.

Подставим теперь выражение для высоты треугольника в формулу его площади: $S = \frac{h \cdot b}{2} = \frac{a \cdot \sin\gamma \cdot b}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$.

Что и требовалось доказать.

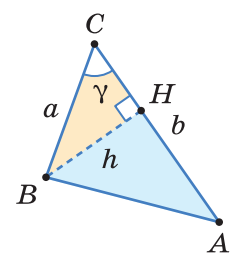


Рис. 56

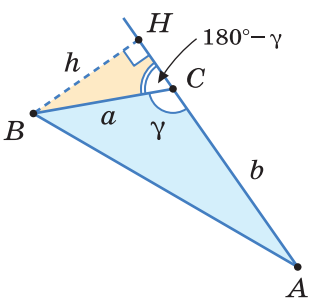


Рис. 57

☞ Зафиксируем длины a и b двух сторон треугольника и будем менять угол γ между ними. Поскольку $\sin\gamma \leqslant 1$, то $S = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} \leqslant \frac{a \cdot b}{2}$. Значит, площадь треугольника не может превышать половины произведения двух его сторон, причём это максимальное значение её будет только в случае, когда угол между данными сторонами равен 90°.

Стороны четырёхугольника в данном порядке равны 1 м, 2 м, 3 м и 4 м.
Может ли его площадь быть равна 5 м²?

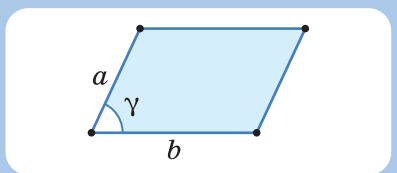
Формула площади параллелограмма

Для вычисления площади параллелограмма тоже есть простая тригонометрическая формула. Докажите её самостоятельно.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Площадь параллелограмма равна произведению двух его соседних сторон на синус угла между ними $S = a \cdot b \cdot \sin\gamma$.

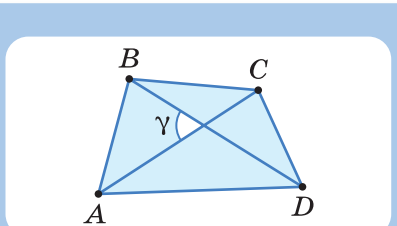


Формула площади четырёхугольника

Как и для треугольника, для вычисления площади четырёхугольника существует формула, связанная с тригонометрией. Оказывается, что все четырёхугольники, имеющие одни и те же диагонали и равные углы между этими диагоналями, имеют и равную площадь. Вытекает это из следующей формулы.

ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

Площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними $S_{ABCD} = \dfrac{AC \cdot BD \cdot \sin\gamma}{2}$.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Проведём доказательство для выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Пусть его диагонали пересекаются в точке M, а острый угол между ними равен γ. Опустим из точек B и D высоты на диагональ AC и обозначим их длины как h_1 и h_2 (рис. 58). Тогда эти две высоты можно выразить через угол и части диагонали BD: $h_1 = BM \cdot \sin\gamma$, $h_2 = DM \cdot \sin\gamma$.

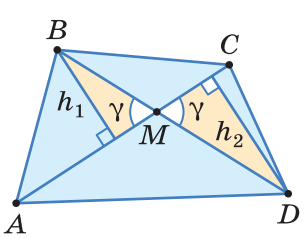


Рис. 58

Обозначим площади треугольников ABC и ACD как S_1 и S_2 (рис. 59). Тогда площадь всего четырёхугольника $ABCD$ будет равна $S_{ABCD} = S_1 + S_2 = \dfrac{AC \cdot h_1}{2} + \dfrac{AC \cdot h_2}{2}$.

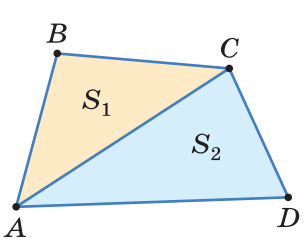


Рис. 59

Подставим в это равенство выражения для h_1 и h_2. Тогда $S_1 + S_2 = \dfrac{AC \cdot BM \cdot \sin\gamma}{2} + \dfrac{AC \cdot DM \cdot \sin\gamma}{2}$.

Вынесем общие множители и запишем сумму этих дробей в виде одной дроби. Тогда мы получим:

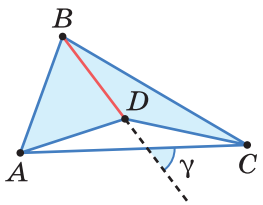
$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 = \frac{AC \cdot (BM + DM) \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\gamma}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

УПРАЖНЕНИЯ

38. Доказанная нами формула верна для любых четырёхугольников, как выпуклых, так и невыпуклых. Пользуясь рисунком 60, докажите её для невыпуклого четырёхугольника.



39. Пользуясь рисунком 61, докажите формулу площади четырёхугольника другим способом.

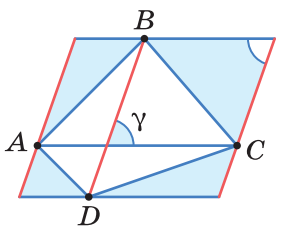


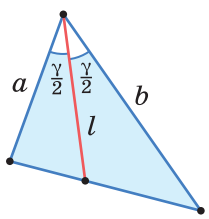
Рис. 61

Формула биссектрисы треугольника

Тригонометрическую формулу площади треугольника удобно использовать для вычисления длин отрезков в треугольнике. Посмотрим, как по этой формуле можно найти длину биссектрисы треугольника, если известны длины двух его сторон и угол между ними.

ФОРМУЛА БИССЕКТРИСЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Если две стороны треугольника равны a и b, а угол между ними равен γ, то биссектриса треугольника, выходящая из вершины этого угла, имеет длину $l = \dfrac{2ab\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть длины двух сторон треугольника равны a и b, угол между ними равен γ, а l — длина биссектрисы, проведённой из вершины этого угла.

Биссектриса делит весь треугольник на два меньших треугольника, площади которых мы обозначим как S_1 и S_2 (рис. 62).

Давайте выразим эти площади через длину биссектрисы l, стороны a и b и угол γ. Для этого удобно использовать доказанную нами формулу площади треугольника. Тогда мы получим, что $S_1 = \dfrac{a\cdot l}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$ и $S_2 = \dfrac{b\cdot l}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

Найдём площадь S треугольника ABC двумя способами.

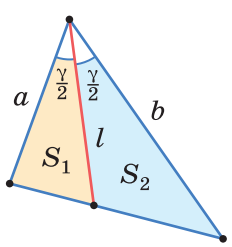


Рис. 62

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

С одной стороны:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{a \cdot l}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} + \frac{b \cdot l}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{l \cdot (a+b)}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}.$$

С другой стороны, площадь S всего треугольника можно найти по той же самой формуле через длины его сторон a и b и угол γ: $S = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin\gamma$.

Приравняем оба этих выражения для площади S и получим нужное нам уравнение: $\frac{l \cdot (a+b)}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{a \cdot b}{2}\sin\gamma$.

Откуда найдём, что $l = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{(a+b) \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}$. Попробуем упростить полученную нами формулу. Для этого вспомним, что по формуле синуса двойного угла $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$.

Тогда $l = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{(a+b) \cdot \sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{2ab \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{(a+b) \cdot \sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{2a \cdot b \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$.

Что и требовалось доказать.

Какая формула может выражать длину отрезка биссектрисы внешнего угла треугольника до пересечения её с продолжением его стороны?

УПРАЖНЕНИЕ

40. В треугольнике ABC провели биссектрису BE. На стороне BC взяли такую точку K, что угол BEK прямой. Найдите длину отрезка BK, если $AB = a$, $BC = b$, причём $a < b$ (рис. 63).

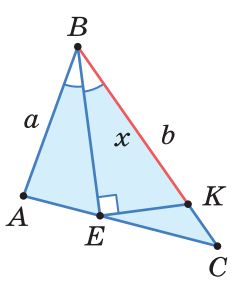


Рис. 63

ВОПРОСЫ

1. Что называют синусом острого угла прямоугольного треугольника?
2. Что называют тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
3. Может ли косинус угла быть больше 1? Может ли он быть меньше нуля?
4. Может ли тангенс острого угла равняться 2? Может ли он равняться -5?
5. В чём заключается основное тригонометрическое тождество?
6. Какие вы знаете формулы приведения?
7. Чему равны $\cos 180°$ и $\sin 90°$?
8. Чему равны $\cos 60°$ и $\sin 45°$?
9. Чему равны $\cos 120°$ и $\sin 150°$?
10. Как расположена ось тангенсов относительно тригонометрического круга?
11. Две точки на тригонометрической окружности симметричны относительно оси Oy. Что можно сказать про координаты этих точек?
12. Какую вы знаете формулу синуса двойного угла?
13. Какую вы знаете формулу косинуса двойного угла?
14. Как выражается площадь треугольника через две его стороны и угол между ними?
15. Какую вы знаете формулу для площади четырёхугольника?
16. Как выражается биссектриса треугольника через две его стороны и угол между ними?

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1. ★☆☆ Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 1, а один его острый угол равен α. Найдите высоту этого треугольника, опущенную на гипотенузу (рис. 64).

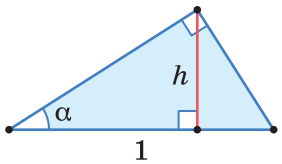


Рис. 64

РЕШЕНИЕ

Пусть гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 1, а его угол при вершине A равен α. Найдём катет AC этого треугольника по определению: $AC = AB \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$.

Опустим на гипотенузу AB высоту CH и рассмотрим прямоугольный треугольник ACH (рис. 65).

Он имеет гипотенузу AC и тот же острый угол α, поэтому $CH = AC \cdot \sin\alpha = \cos\alpha \cdot \sin\alpha$.

Ответ: $\cos\alpha \cdot \sin\alpha$.

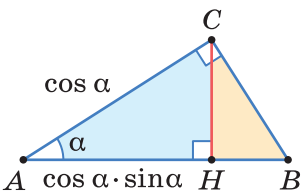


Рис. 65

ПРИМЕР 2. ★☆☆ Точки A и B лежат на одной прямой с основанием высокой башни и по одну сторону от неё. Из точки A башня видна под углом 30°, а из точки B — под углом 45°. Найдите высоту башни, если расстояние между точками A и B равно 100 м (рис. 66).

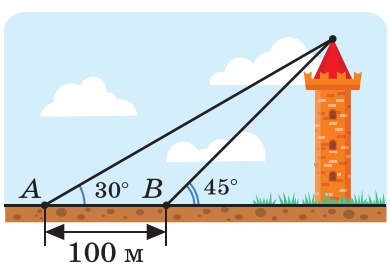


Рис. 66

РЕШЕНИЕ

Обозначим высшую точку башни буквой C и опустим из неё перпендикуляр CH на землю. Высота h башни равна длине этого перпендикуляра.

Рассмотрим прямоугольный треугольник BCH (рис. 67). Его острый угол при вершине B равен 45°, поэтому другой угол этого треугольника тоже равен 45°. Следовательно, этот треугольник равнобедренный. Значит, его катет BH равен высоте башни h.

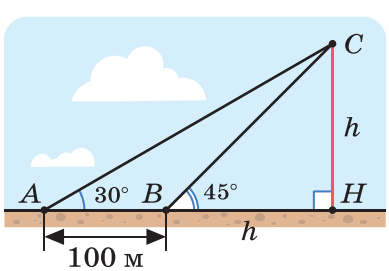


Рис. 67

Теперь посмотрите на прямоугольный треугольник ACH (рис. 68). Его острый угол при вершине A равен 30°. Давайте выразим горизонтальный катет AH этого треугольника через h. Тангенс острого угла прямоугольного треугольника — это отношение его катетов: противолежащего к прилежащему. Поэтому $CH : AH = \operatorname{tg} 30°$. Значит, $\frac{h}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Откуда $AH = \sqrt{3}h$.

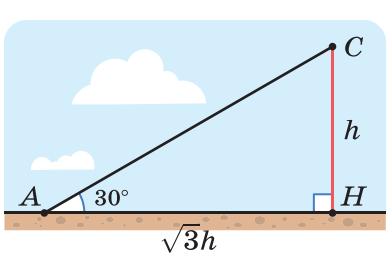


Рис. 68

Нам осталось использовать то, что расстояние AB между точками наблюдения башни равно 100 м. Поскольку точки A и B лежат на прямой по одну сторону от точки H, то должно быть $AB + BH = AH$. Подставим в это равенство полученные нами выражения для отрезков AH и BH. Тогда мы получим такое уравнение:

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

1 0 0 + h = h
Откуда найдём высоту: $h = \frac{100}{\sqrt{3}-1} = \frac{100\cdot(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}+1)} =$

$= \frac{100\cdot(\sqrt{3}+1)}{2} \approx \frac{100\cdot 2{,}73}{2} = \frac{273}{2} = 132{,}5.$

Ответ: 132,5 м.

ПРИМЕР 3. ★★☆ В четырёхугольнике $ABCD$ углы при его вершинах A, B и D соответственно равны 60°, 150° и 45° (рис. 69). Найдите длины его сторон BC и AD, если $AB = \sqrt{3}$, $CD = \sqrt{8}$.

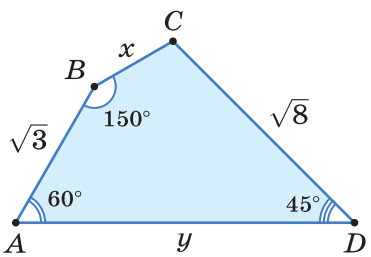


Рис. 69

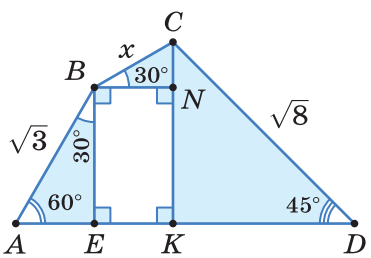


Рис. 70

РЕШЕНИЕ

Постараемся «отрезать» от данного четырёхугольника $ABCD$ несколько прямоугольных треугольников. Для этого опустим из его вершин B и C перпендикуляры BE и CK на сторону AD и проведём перпендикуляр BN на прямую CK. Весь четырёхугольник $ABCD$ при этом окажется разбит на прямоугольные треугольники и один прямоугольник $EBNK$ (рис. 70).

Сначала найдём катет BE прямоугольного треугольника ABE. Угол при вершине A этого треугольника равен 60°, поэтому $BE = AB\cdot\sin 60° = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Кроме того, отметим, что острый угол этого треугольника при вершине B равен $90° - 60° = 30°$.

Из треугольника CKD мы так же найдём, что $CK = CD\cdot\sin 45° = \sqrt{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$.

Это позволяет нам найти отрезок CN. Поскольку у прямоугольника $EBNK$ противоположные стороны равны, то $NK = BE$, и поэтому $CN = CK - BE = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$.

Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник BCN. Его угол при вершине B равен $150° - 90° - 30° = 30°$. Поэтому $BC\cdot\sin 30° = CN$. Но тогда $0{,}5BC = 0{,}5$. Откуда $BC = 1$.

Теперь найдём длину стороны AD. Она складывается из трёх частей: $AD = AE + EK + KD$. Вычислим длину каждой из них:

$AE = AB\cdot\cos 60° = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$EK = BC\cdot\cos 30° = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$KD = CD\cdot\cos 45° = \sqrt{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$.

Значит, $AD = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \sqrt{3} + 2$.

Ответ: 1 и $\sqrt{3} + 2$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ПРИМЕР 4. ★★☆ Тангенс острого угла равен 0,75. Найдите тангенс половины этого угла.

РЕШЕНИЕ

Как построить острый угол, тангенс которого равен 0,75? Любой острый угол можно рассматривать как угол некоторого прямоугольного треугольника. Построим прямоугольный треугольник ABC, у которого катеты BC и AC соответственно равны 3 и 4 (рис. 71). Тогда тангенс угла α при вершине A этого треугольника будет равен $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

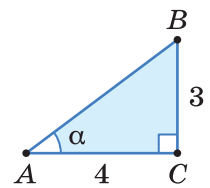


Рис. 71

Найдём его гипотенузу AB по теореме Пифагора: $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. Следовательно, $AB = 5$ и построенный нами треугольник — это наш «старый знакомый», обычно его называют египетским.

Чтобы на рисунке треугольника ABC найти половину угла α, можно провести биссектрису этого угла. Но мы поступим по-другому: отложим на продолжении катета AC отрезок AE, равный гипотенузе AB этого треугольника. Соединим точки B и E отрезком и получим равнобедренный треугольник ABE. По свойству равнобедренного треугольника его углы при основании BE должны быть равны. Обозначим их величину буквой β (рис. 72). Угол CAB является внешним углом для треугольника ABE, поэтому он равен сумме двух данных углов, поэтому $\alpha = 2\beta$. Отсюда следует, что $\beta = \frac{1}{2}\alpha$. Как же теперь найти $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$?

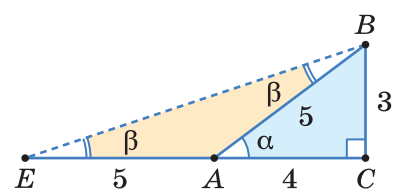


Рис. 72

Посмотрите на прямоугольный треугольник BCE. Он как раз имеет данный острый угол при вершине E, а длины его катетов BC и CE равны 3 и 9.

Поэтому $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{BC}{CE} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

ПРИМЕР 5. ★★☆ Катеты прямоугольного треугольника равны a и b ($a < b$). Прямая проходит через вершину его прямого угла и образует с большим катетом угол 60°. Найдите отрезок этой прямой, находящийся внутри треугольника (рис. 73).

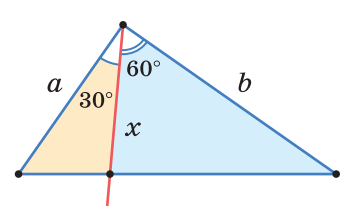


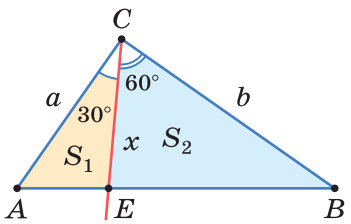
Рис. 73

РЕШЕНИЕ

Пусть прямая проходит через вершину C прямого угла треугольника ABC и пересекает его гипотенузу AB в точке E. Будем считать, что $AC = a$, $BC = b$. Если по условию угол BCE равен 60°, то угол ACE будет равен $90° - 60° = 30°$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Обозначим длину отрезка CE как x, а площади треугольников ACE и BCE как S_1 и S_2 (рис. 74). Выразим их через x по известной нам формуле:



$$S_1 = \frac{a \cdot x}{2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{a \cdot x}{4},$$

$$S_2 = \frac{b \cdot x}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{b \cdot x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b \cdot x \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

А теперь запишем площадь треугольника ABC двумя способами. С одной стороны:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{a \cdot x}{4} + \frac{b \cdot x \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(a + b \cdot \sqrt{3}) \cdot x}{4}.$$

С другой стороны, $S = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin 90^\circ = \frac{a \cdot b}{2}$. Так мы получим уравнение $\frac{(a + b \cdot \sqrt{3}) \cdot x}{4} = \frac{a \cdot b}{2}$, из которого найдём, что $x = \frac{2a \cdot b}{a + b \cdot \sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{2a \cdot b}{a + b \cdot \sqrt{3}}$.

ПРИМЕР 6. ★★☆ Медиана равнобедренного треугольника, проведённая к его боковой стороне, образует с его основанием угол 45° (рис. 75). С точностью до 1° найдите угол при основании этого треугольника.

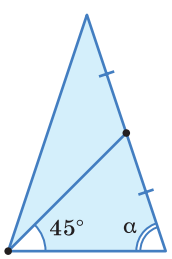


Рис. 75

РЕШЕНИЕ

Пусть медиана AM равнобедренного треугольника ABC образует с его основанием AC угол, равный 45°. Опустим из точек B и M перпендикуляры BH и MK на основание AC (рис. 76). Поскольку треугольник ABC равнобедренный, то высота BH разделит его основание пополам, а параллельный ей перпендикуляр MK по теореме Фалеса разделит пополам отрезок HC. Поэтому отрезки HK и CK будут равны, обозначим их длину одной буквой a. Длина отрезка AH тогда будет равна $2a$.

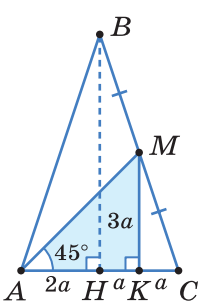


Рис. 76

Поскольку угол MAC равен 45° по условию, то прямоугольный треугольник AMK будет равнобедренным. Значит, его катеты AK и MK будут равны $3a$. Отрезок MK является средней линией треугольника HBC, поэтому $BH = 2 \cdot MK = 6a$.

А теперь посмотрите на прямоугольный треугольник HBC (рис. 77). Давайте обозначим острый угол при его вершине C как α. По определению из этого треугольника найдём, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$, и по тригонометрической таблице найдём, что $\alpha \approx 72^\circ$.

Ответ: 72°.

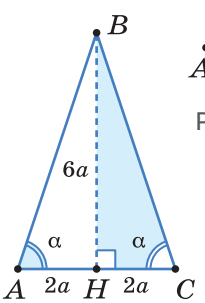


Рис. 77

В разделе «Для тех, кто хочет знать больше» вы можете прочитать про «золотой» треугольник с углом 72°. А треугольник, который мы рассмотрели в ПРИМЕРЕ 6, является почти «золотым».

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ПРИМЕР 7. ★★★ Основание равнобедренного треугольника равно 6, а боковые его стороны равны 5. Две равные окружности касаются друг друга, причём одна из них касается боковых сторон треугольника, а другая — одной его боковой стороны и основания (рис. 78). Найдите радиус этих окружностей.

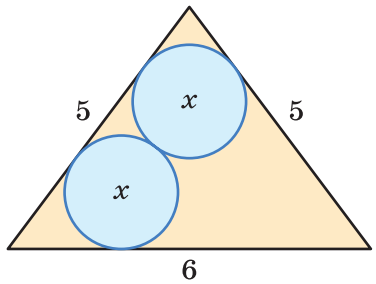


Рис. 78

Перед тем как решать данную задачу, давайте сформулируем *лемму* — полезное вспомогательное утверждение, которым мы будем пользоваться в дальнейшем.

ЛЕММА

Если окружность радиуса R вписана в угол величиной α, то расстояние от вершины угла до точек её касания со сторонами угла можно найти по формуле ⏩

$$x = R \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть окружность с центром O вписана в угол с вершиной A и касается его стороны в точке K. По свойству окружности, вписанной в угол, её центр лежит на биссектрисе этого угла. Поэтому угол OAK равен $\frac{\alpha}{2}$ (рис. 79). А по теореме о касательной радиус OK образует со стороной угла угол 90°. Значит, треугольник AOK прямоугольный с острым углом $\frac{\alpha}{2}$. По определению $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R}{AK}$. Откуда $AK = \frac{R}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

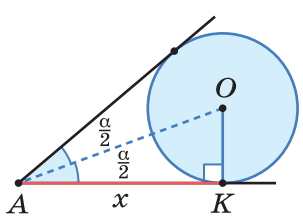


Рис. 79

РЕШЕНИЕ

Пусть две равные окружности с центрами O_1 и O_2 касаются стороны AB треугольника в точках K_1 и K_2. Обозначим их радиусы буквой x. Так как эти окружности касаются друг друга, то $O_1O_2 = 2x$. А поскольку их радиусы равны, то четырёхугольник $O_1K_1K_2O_2$ будет прямоугольником (*подумайте почему*). Значит, $K_1K_2 = O_1O_2 = 2x$.

Окружность с центром O_1 вписана в угол треугольника с вершиной B — его величину мы обозначим как β. Так как треугольник ABC равнобедренный, то его высота BH совпадает с медианой и биссектрисой (рис. 80). Запишем теорему Пифагора для прямоугольного треугольни-

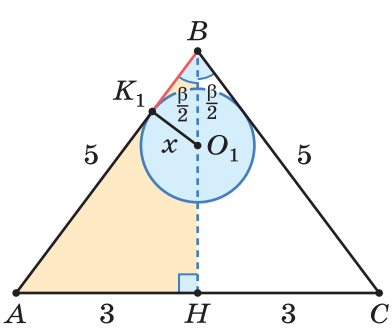


Рис. 80

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ка ABH: $BH^2 + 3^2 = 5^2$. Откуда найдём, что $BH = 4$. Теперь выразим отрезок BK_1 через радиус x. По доказанной нами лемме $BK_1 = \dfrac{x}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$, а из прямоугольного треугольника ABH найдём, что $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{3}{4}$. Поэтому $BK_1 = \dfrac{4x}{3}$.

Окружность с центром O_2 вписана в угол A треугольника ABC — мы обозначим его величину как α (рис. 81). По лемме мы имеем, что $AK_2 = \dfrac{x}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. Величину $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ можно найти с помощью того же приёма, который мы применили при решении примера 4. Сделаем это: отложим на продолжении катета AH прямоугольного треугольника ABH отрезок AE, равный его гипотенузе AB (рис. 82). Тогда угол BEH будет равен $\dfrac{1}{2}\alpha$.

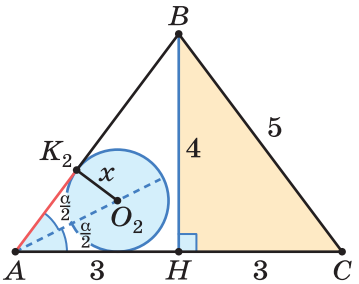


Рис. 81

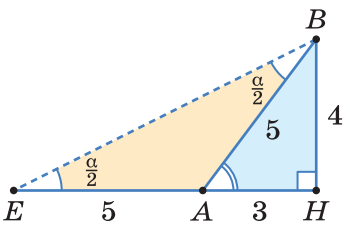


Рис. 82

Из прямоугольного треугольника BEH найдём, что $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{BH}{EH} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$. Значит, $AK_2 = x : \left(\dfrac{1}{2}\right) = 2x$. Нам осталось составить уравнение. Поскольку точки K_1 и K_2 лежат на стороне AB (рис. 83), то: $AK_2 + K_2K_1 + BK_1 = AB$. Значит, должно выполняться равенство $\dfrac{4x}{3} + 2x + 2x = 5$.

Откуда $x = \dfrac{15}{16}$.

Ответ: $\dfrac{15}{16}$.

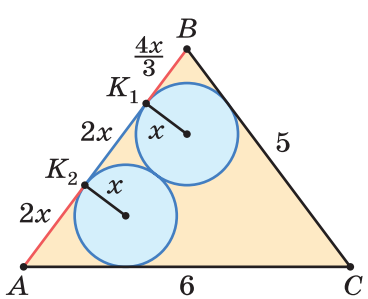


Рис. 83

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

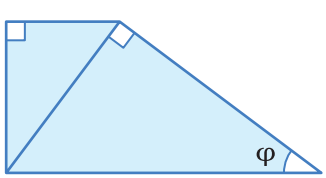
ЗАДАЧИ

1. ★☆☆ Острый угол прямоугольного треугольника равен α. Найдите его площадь, если гипотенуза этого треугольника равна 1.

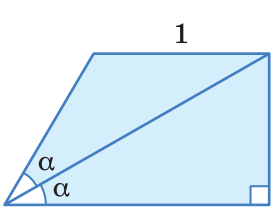
2. ★☆☆ Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 1. Найдите площадь этого треугольника, если угол при его основании равен α.

3. ★☆☆ Основание равнобедренного треугольника равно 16, а его боковая сторона 17. Найдите синус и косинус угла при основании этого треугольника.

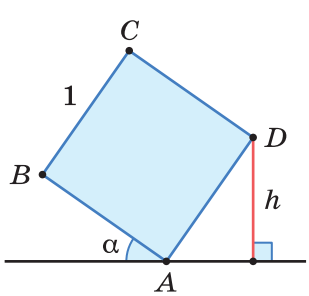
4. ★☆☆ Диагональ прямоугольной трапеции перпендикулярна боковой стороне. Найдите отношение оснований трапеции, если её острый угол равен φ. (▸▸ рис.)



▸▸ задача 4

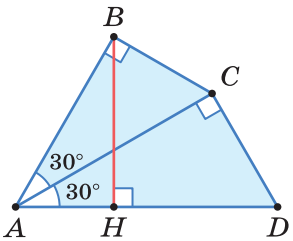


▸▸ задача 5

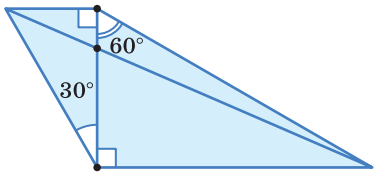


▸▸ задача 6

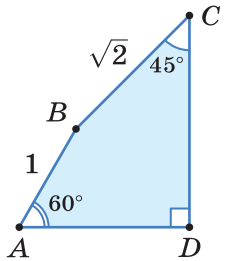
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 7



задача 8



задача 9

5. ★☆☆ Меньшее основание прямоугольной трапеции равно 1. Найдите её большее основание, если диагональ трапеции образует с этим основанием и боковой стороной углы, равные α. (▸▸ рис.)

6. ★☆☆ Прямая проходит через вершину A квадрата $ABCD$ и образует с его стороной AB угол α. Найдите расстояние от вершины D до данной прямой, если $\sin\alpha = 0{,}6$. (▸▸ рис.)

7. ★☆☆ В четырёхугольнике $ABCD$ углы BAC и CAD равны 30°, а углы ABC и ACD прямые. В каком отношении делит сторону AD опущенный на неё из вершины B перпендикуляр BH? (▸▸ рис.)

8. ★☆☆ Диагональ трапеции перпендикулярна основаниям и образует с боковыми сторонами углы 30° и 60°. В каком отношении делит её другая диагональ трапеции? (▸▸ рис.)

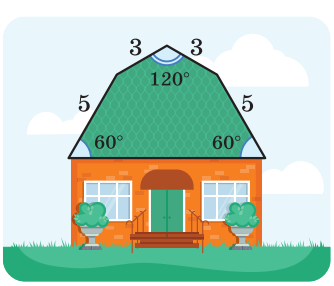
9. ★☆☆ В четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и C соответственно равны 60° и 45°, а угол при вершине D прямой. Найдите его сторону AD, если $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$. (▸▸ рис.)

10. ★☆☆ Крыша дома с мансардой имеет два ската длиной 5 м, угол наклона которых равен 60°. Два других ската имеют длину 3 м и образуют между собой угол 120° на коньке крыши. Найдите ширину фасада этого дома и высоту его мансарды с точностью до 1 см. (▸▸ рис.)

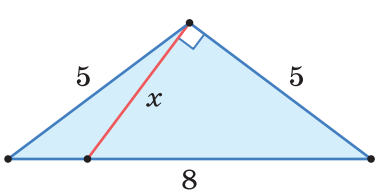
11. ★☆☆ Основание равнобедренного треугольника равно 8, а его боковые стороны — 5. Через вершину, против основания к его боковой стороне провели перпендикуляр. Найдите отрезок этого перпендикуляра, заключённый внутри треугольника. (▸▸ рис.)

12. ★☆☆ Точка касания окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит его боковую сторону на отрезки с длинами 2 и 3. Найдите косинус угла при основании этого треугольника. (▸▸ рис.)

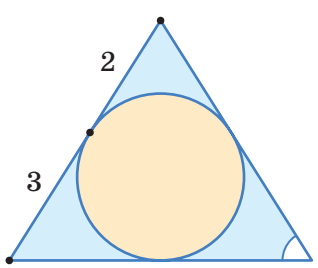
13. ★☆☆ Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найди-



задача 10

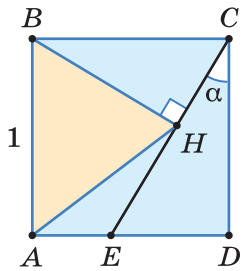


задача 11

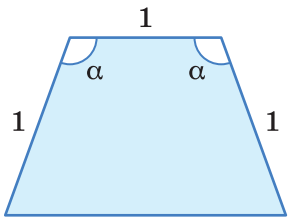


задача 12

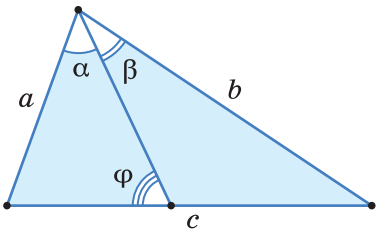
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 23



задача 25



задача 30

те радиус вписанной в треугольник окружности, если основание равно a.

14. ★☆☆ Пусть в треугольнике против его сторон a и b лежат углы α и β. Докажите, что длину c его третьей стороны можно найти по формуле $c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$. Будет ли эта формула верна в случае, когда один из углов, α или β, тупой?

15. ★☆☆ Косинус одного из углов прямоугольного треугольника равен 0,7. В каком отношении делит его гипотенузу высота, опущенная из прямого угла?

16. ★☆☆ Синус острого угла прямоугольного треугольника равен 0,4. В каком отношении делит его гипотенузу высота, опущенная из прямого угла?

17. ★☆☆ В ромб с острым углом α вписали окружность. Найдите её радиус, если сторона ромба равна 1.

18. ★☆☆ Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найдите отношение радиуса вписанной в этот треугольник окружности к его высоте, опущенной на основание.

19. ★☆☆ Окружность радиуса R с центром O касается сторон угла в точках A и B. Найдите площадь треугольника AOB, если данный угол равен α.

20. ★☆☆ Из двух точек A и B, находящихся на земле по разные стороны от башни, она видна под углами 30° и 45°. Определите высоту башни, если точки A и B лежат с башней на одной прямой линии, а расстояние между ними равно 100 м.

21. ★☆☆ Два угла треугольника равны 45° и 60°, а сторона между ними равна 2. Найдите высоту треугольника, опущенную на эту сторону.

22. ★☆☆ Основание равнобедренного треугольника равно 10, а тангенс угла при его основании равен 3. Найдите сторону квадрата, две вершины которого лежат на основании треугольника, а две другие — на его боковых сторонах.

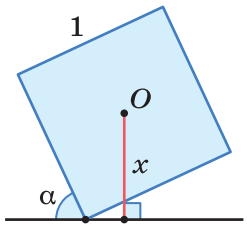
23. ★☆☆ Сторона квадрата $ABCD$ равна 1. На стороне AD взяли точку E так, что $\angle ECD = \alpha$. Из вершины B на CE опустили перпендикуляр BH. Найдите площадь треугольника ABH. (▸▸ рис.)

24. ★☆☆ Острый угол прямоугольного треугольника равен α, а его гипотенуза равна 1. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

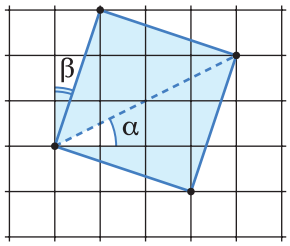
25. ★☆☆ Три стороны трапеции равны 1, а тупые углы между ними равны α. Найдите площадь трапеции. (▸▸ рис.)

26. ★☆☆ Четыре стороны пятиугольника равны 1, а три его угла между ними равны 120°. Найдите пятую сторону этого пятиугольника.

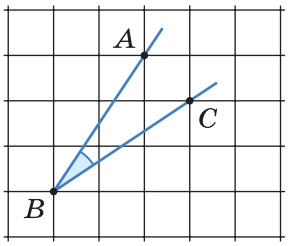
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 31



задача 32



задача 35

27. ★★☆ Сторона квадрата равна 1. Через его центр провели произвольную прямую. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин квадрата до этой прямой.

28. ★★☆ Геометрически докажите, что $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

29. ★★☆ Геометрически докажите, что для острого угла α справедлива формула $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)}$.

30. ★★☆ Пользуясь чертежом, покажите, что $a\sin\alpha + b\sin\beta = c\sin\varphi$. (▸▸ рис.)

31. ★★☆ Прямая проходит через вершину квадрата и образует с его стороной угол α. Найдите расстояние до этой прямой от центра квадрата, если его сторона равна 1, а $\sin\alpha = 0{,}8$. (▸▸ рис.)

32. ★★☆ Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$ для острых углов α и β. Пользуясь рисунком, найдите $\alpha + \beta$. (▸▸ рис.)

33. ★★☆ В окружность с радиусом 2 вписан треугольник с углами 15° и 45°. Найдите его площадь.

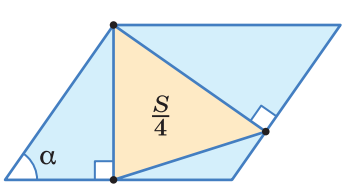
34. ★★☆ Докажите, что для любого треугольника с углами α, β и γ верно соотношение $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \frac{2S}{R^2}$, где S — площадь треугольника, а R — радиус его описанной окружности.

35. ★★☆ Найдите синус угла ABC, изображённого на клетчатой бумаге. (▸▸ рис.)

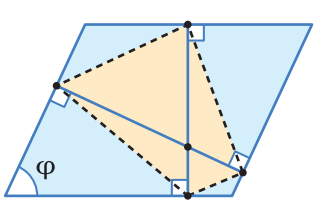
36. ★★☆ Из вершины тупого угла параллелограмма на две его противоположные стороны опустили высоты. Оказалось, что образованный этими высотами треугольник составляет одну четверть от площади всего параллелограмма. Найдите острый угол параллелограмма. (▸▸ рис.)

37. ★★☆ Внутри параллелограмма взяли точку. Из неё на все его стороны опустили перпендикуляры. Их основания образуют новый четырёхугольник. Найдите отношение площадей этого четырёхугольника и параллелограмма, если один из его углов равен φ. (▸▸ рис.)

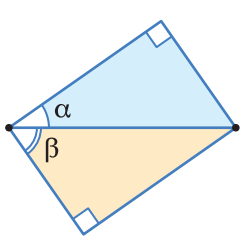
38. ★★☆ Пользуясь рисунком, докажите: $\sin(\alpha+\beta) = \frac{(\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\beta\cdot\sin\beta)}{(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)}$. (▸▸ рис.)



задача 36

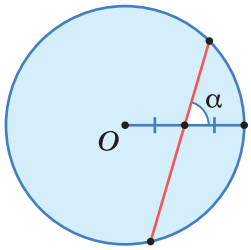


задача 37

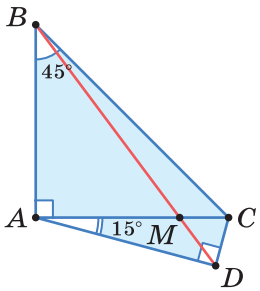


задача 38

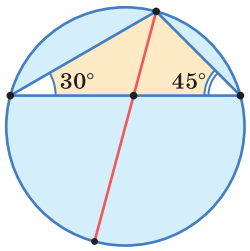
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 42



задача 43



задача 45

39. ★★☆ В прямоугольный треугольник с углом 30° вписана окружность радиуса 1. Найдите площадь треугольника, образованного точками касания этой окружности с его катетами и гипотенузой.

40. ★★☆ Диагонали четырёхугольника разбивают его на 4 треугольника. Центры окружностей, описанных вокруг них, образуют новый четырёхугольник. Найдите отношение площади нового четырёхугольника к площади данного, если угол между его диагоналями равен φ.

41. ★★☆ Докажите, что для любого треугольника, длины сторон которого a, b и c, верно соотношение $2ab\cdot\sin\gamma = (a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, если угол γ лежит против стороны c.

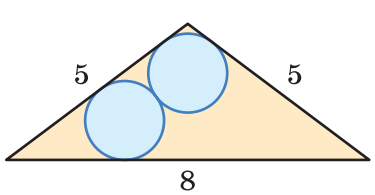
42. ★★☆ Радиус окружности равен 1. Найдите длину её хорды, которая проходит через середину одного из радиусов этой окружности под углом α к нему. (▸▸ рис.)

43. ★★☆ Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Известно, что углы BAC и ADC прямые, угол ABC равен 45°, а угол CAD равен 15°. Найдите отношение $BM : DM$. (▸▸ рис.)

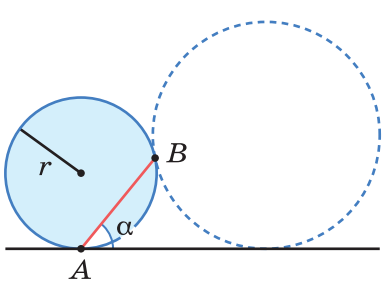
44. ★★☆ Сторона треугольника равна 1, а тангенсы прилегающих к ней углов равны 2,4 и 0,75. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

45. ★★☆ В окружность вписан треугольник, два угла которого равны 45° и 30°. Через вершину третьего угла провели диаметр этой окружности. В каком отношении он делит сторону треугольника? (▸▸ рис.)

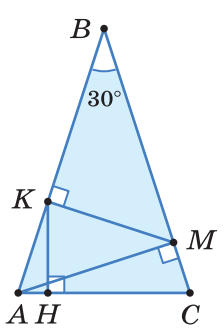
46. ★★☆ Основание равнобедренного треугольника равно 8, а боковые его стороны равны 5. Две равные окружности касаются друг друга, причём одна из них касается боковых сторон треугольника, а другая — одной его боковой стороны и основания. Найдите радиус этих окружностей. (▸▸ рис.)



задача 46

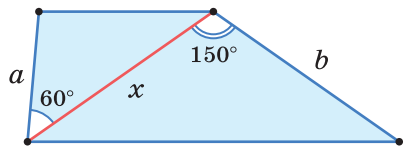


задача 47

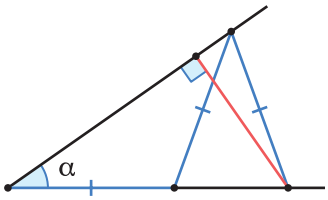


задача 48

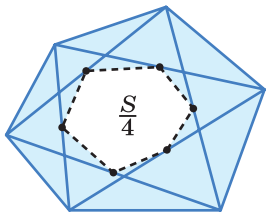
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 50



задача 51



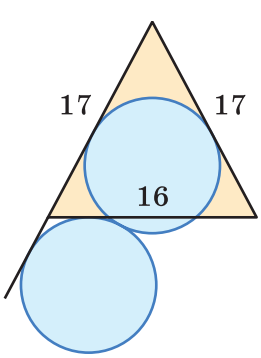
задача 52

47. ★★☆ Окружность радиуса r касается прямой в точке A. Хорда AB этой окружности образует с данной прямой угол α. Найдите радиус второй окружности, касающейся первой окружности в точке B и данной прямой. (▸▸ рис.)

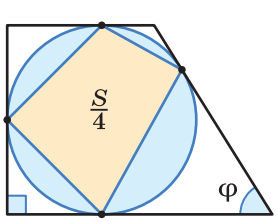
48. ★★☆ В равнобедренном треугольнике ABC провели высоту AM. Отрезок MK перпендикулярен стороне AB, отрезок KH перпендикулярен основанию AC. Найдите отношение $AH : HC$, если угол ABC равен 30°. (▸▸ рис.)

49. ★★☆ Медиана, проведённая к боковой стороне равнобедренного треугольника, образует с его основанием угол 60°. С точностью до 1° найдите угол между боковыми сторонами этого треугольника.

50. ★★★ Боковые стороны трапеции равны a и b. Найдите длину её диагонали, если она образует с ними углы 60° и 150°. (▸▸ рис.)



задача 53



задача 55

51. ★★★ Пользуясь рисунком, докажите формулу $\sin 3\alpha = (1 + 2\cos 2\alpha) \cdot \sin\alpha$. (▸▸ рис.)

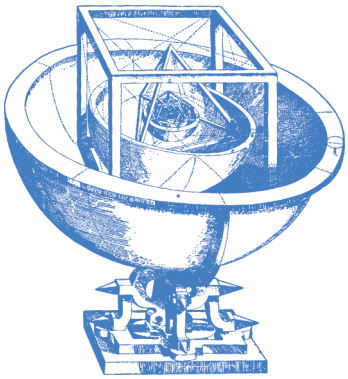
52. ★★★ В выпуклом шестиугольнике провели шесть диагоналей так, как это показано на рисунке. Докажите, что середины этих диагоналей образуют шестиугольник, площадь которого в 4 раза меньше площади исходного шестиугольника. (▸▸ рис.)

53. ★★★ Основание равнобедренного треугольника равно 16, а боковые стороны равны 17. Найдите радиус двух равных окружностей, одна из которых касается двух боковых сторон треугольника, а другая касается его основания, продолжения боковой стороны и первой окружности. (▸▸ рис.)

54. ★★★ Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC, точка I — центр его вписанной окружности. Докажите, что $AI \cdot BI \cdot CI = 4R \cdot r^2$.

55. ★★★ В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точки её касания со сторонами образуют новый четырёхугольник, площадь которого равна одной четверти площади всей трапеции. Найдите острый угол трапеции. (▸▸ рис.)

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Косинус угла 72°

В главную таблицу мы с вами записали точные значения синусов, косинусов и тангенсов для углов 30°, 45° и 60°. Каждый из них имеет отношение к некоторому правильному многоугольнику. Углы 30° и 60° прямо связаны с правильным, или равносторонним, треугольником (рис. 84), а угол 45° — с квадратом (рис. 85). Оказывается, есть ещё несколько острых углов, величина которых — целое число градусов, а значения их синусов и косинусов также можно вычислить точно. Эти углы мы не записали в таблицу точных значений просто потому, что они более сложные. А связаны они с правильным пятиугольником.

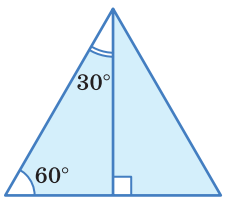


Рис. 84

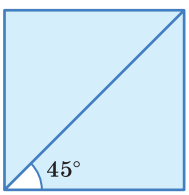


Рис. 85

Давайте выясним, чему равны эти углы. Все углы правильного пятиугольника равны между собой, поэтому каждый из них равен $(3\cdot 108^\circ) : 5 = 108^\circ$. Любая диагональ отсекает от этого пятиугольника равнобедренный треугольник с углом 108°, значит, другие его углы равны $(180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ$. Поэтому диагональ такого пятиугольника образует с его сторонами углы 36° и 72° (рис. 86).

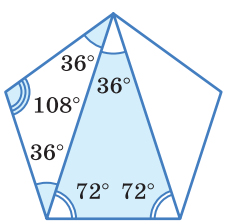


Рис. 86

Эти углы имеют точные значения синуса и косинуса, их можно выразить через квадратные корни из целых чисел. Как же найти эти значения? Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углами 36° и 72° — он образован двумя диагоналями и стороной правильного пятиугольника (рис. 87). Примем длину боковых сторон этого треугольника за 1, а длину его основания обозначим буквой x. Сделаем дополнительное построение: проведём в этом треугольнике биссектрису AE угла при его основании. Она образует с основанием и боковой стороной этого треугольника углы в 36°. Тогда треугольник ABE будет равнобедренным по признаку, поскольку имеет равные углы при вершинах A и B. А его внешний угол AEC будет равен 72°. Но тогда треугольник AEC тоже будет равнобедренным, ведь его углы при вершинах E и C равны 72°. Значит, биссектриса AE делит треугольник ABC на два меньших равнобедренных треугольника.

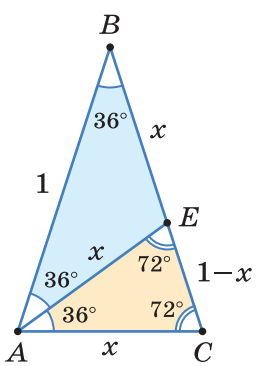


Рис. 87

Поэтому $BE = AE = AC = x$ и $EC = 1 - x$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

А теперь самое главное. Посмотрите на треугольник AEC: он имеет те же углы, что и треугольник ABC. Значит, они подобны по первому признаку подобия треугольников! Поэтому для их сторон можно записать пропорцию: $\frac{EC}{AC} = \frac{AC}{AB}$ или $\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$. Откуда получаем уравнение $x^2 = 1 - x$ или $x^2 + x - 1 = 0$.

Это уравнение имеет два корня, но только один из них положительный и может быть длиной отрезка. Поэтому $AC = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Чтобы найти косинус угла 72°, опустим в треугольнике ABC высоту BH на основание AC (рис. 88). Эта высота совпадёт с его медианой, поскольку данный треугольник равнобедренный.

Тогда из прямоугольного треугольника ABH можно найти по определению, что $\cos 72° = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

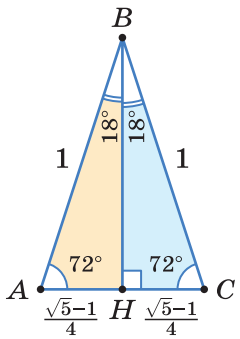


Рис. 88

Кроме углов 36° и 72°, точные значения для синуса и косинуса можно найти для некоторых других углов, которые с ними связаны. Например, синус и косинус углов 9°, 63° и 81° тоже можно выразить через квадратные корни из целых чисел. Подумайте, почему это так.

УПРАЖНЕНИЕ

41. Найдите значения: а) $\sin 18°$; б) $\cos 18°$; в) $\sin 36°$; г) $\cos 54°$. Сравните их с приближёнными значениями в тригонометрической таблице.

Золотое сечение

Вы знаете, что треугольник с углами 36° и 72° иногда называют «золотым» треугольником? Такое название связано с тем, что отношение его сторон — это так называемое **золотое сечение**. Давайте поясним, что это значит.

Любой отрезок можно разделить пополам, можно поделить его в отношении 2 : 3 или в отношении каких-то двух других целых чисел. Но древние греки считали, что такое деление отрезка не будет давать гармонии. Каким же должно быть самое гармоничное отношение двух частей, составляющих одно целое? Они полагали, что совершенное, или гармоничное, деление отрезка на две части должно быть следующим: *меньшая из этих частей должна относиться к большей части так же, как большая часть относится ко всему отрезку*. Если мы данный отрезок обозначим AB, а точку его деления — K (рис. 89), то правило золотого сечения можно будет записать так: $\frac{AK}{BK} = \frac{BK}{AB}$.

Примем длину отрезка AB за 1, а длину большей части за x. Тогда «золотая» пропорция примет вид: $\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$. Откуда $\frac{AK}{KB} = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$.

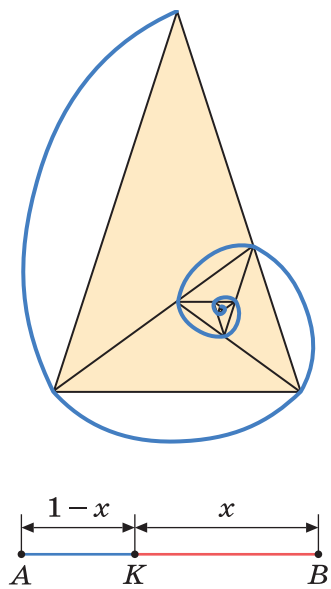


Рис. 89

Золотое сечение

$$\frac{AK}{BK} = \frac{BK}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$$

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Вы наверняка заметили, что «золотая» пропорция равна отношению основания треугольника с углами 36° и 72° к его боковой стороне. Поэтому такой треугольник и называют «золотым». Конечно, и золотое сечение, и «золотой» треугольник, имеют прямое отношение к правильному пятиугольнику (рис. 90). Можно сказать, что это число — главное число правильного пятиугольника. Ведь именно так относится сторона правильного пятиугольника к любой его диагонали, в том же отношении делят друг друга и сами диагонали. В связи с этим стоит напомнить, что именно правильный пятиугольник с его диагоналями, или пентаграмма, был символом знаменитой школы Пифагора.

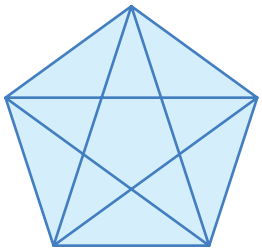


Рис. 90

Золотую, или божественную, пропорцию часто использовали греческие скульпторы и зодчие. Одним из самых знаменитых был Фидий из Афин, поэтому золотое сечение стали обозначать буквой φ — первой буквой его имени. Он создал из мрамора, золота и слоновой кости прекрасные статуи Афины и Зевса, руководил строительством самого известного храма Древней Греции — Парфенона в Афинах (рис. 91).

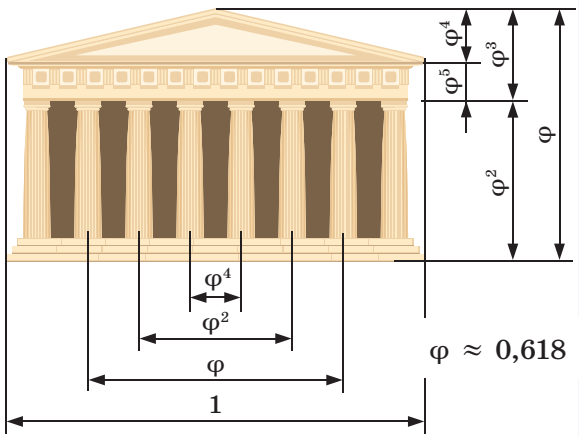


Рис. 91
В пропорциях Парфенона Фидий использовал божественное соотношение

Впрочем, золотое сечение встречается не только в архитектуре. Число φ содержат в себе пропорции человеческого тела, раковины морских моллюсков и рога архаров. Семечки в подсолнухе также располагаются на золотой спирали, как и звёзды в нашей Галактике. Можно сказать, что золотое сечение и связанная с ним золотая спираль служат математической моделью идеального роста.

Знаете, как построить золотую спираль? Для этого нужно взять прямоугольник, отношение сторон которого равно числу φ. Если отрезать от этого «золотого» прямоугольника квадрат со стороной, равной стороне прямоугольника, то в остатке получится тоже «золотой» прямоугольник (*подумайте почему!*). Точно так же можно отрезать меньший квадрат от этого остатка, получить ещё меньший «золотой» прямоугольник и т. д. Впишем в каждый из этих квадратов дугу окружности с радиусом, равным его стороне, и расположим их так, чтобы каждая такая дуга плавно переходила в следующую. Так мы получим золотую спираль, которая сходится в одну точку прямоугольника. Именно из этой точки и происходит развитие раковины моллюска по спирали (рис. 92).

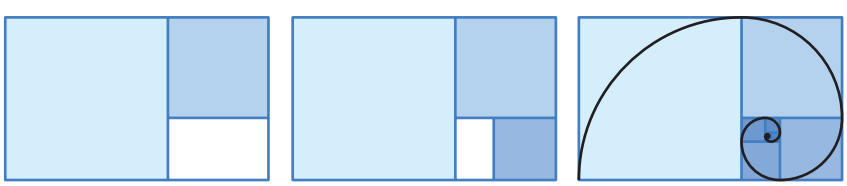




Рис. 92

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

§2 Теорема синусов

Если в треугольнике один угол больше другого, то против него в этом треугольнике должна лежать бóльшая сторона. Это утверждение вам известно ещё с седьмого класса. Но как понять, зная углы треугольника, во сколько раз одна его сторона больше другой? Давайте для примера возьмём треугольник с углами 30°, 60° и 90°. Величины его углов относятся как $1 : 2 : 3$, а противоположные от них стороны — как $1 : \sqrt{3} : 2$ (рис. 1). Сразу бросается в глаза, что длины сторон треугольника вовсе не пропорциональны величинам его углов. Связь между углами и сторонами в треугольнике более сложная, и мы сейчас увидим, что она имеет прямое отношение к тригонометрии. Историки считают, что впервые такую зависимость обнаружил в начале XI века арабский математик аль-Бируни. А сейчас её называют теоремой синусов. Давайте сформулируем эту теорему сначала в классическом виде.

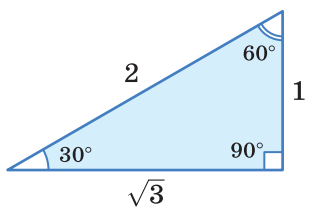
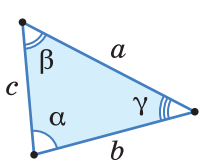


Рис. 1

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Стороны в треугольнике пропорциональны синусам противолежащих углов:
$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.



$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть в треугольнике против углов α, β и γ лежат стороны с длинами a, b и c. Запишем площадь S этого треугольника через каждый его угол и две прилегающие стороны:

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}.$$

Теперь умножим все части этого равенства на 2 и разделим на произведение сторон abc. Тогда мы получим, что

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Откуда следует, что $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$.
Что и требовалось доказать.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Теорема синусов позволяет по одной стороне и любым двум углам треугольника находить другие его стороны. Так, если в треугольнике известны сторона c и прилежащие к ней углы α и β, то по теореме синусов легко можно найти другие его стороны a и b (рис. 2).

Для этого сначала нужно найти третий угол γ этого треугольника: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$.

А потом записать теорему синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Откуда $a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$, $b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$.

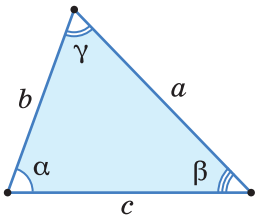


Рис. 2

Находить по одной стороне и двум углам треугольника две другие его стороны было нужно не только математикам или астрономам, но и для составления географических карт. Ведь в XVIII и XIX веках не было ещё ни спутников, ни современной системы *GPS*, ни даже самолётов и фотоаппарата. Тем не менее географические карты различных стран и земель уже существовали, и были они довольно точными. Как же делали такие карты?

Для этого на пересечённой местности строили огромную сеть вышек, с помощью которых территорию всей страны разбивали на большие треугольники. Такое разбиение местности на треугольники назвали научным словом «триангуляция». При триангуляции надо было обязательно соблюдать одно важное правило: с каждой вышки должны быть хорошо видны две соседние с ней вышки. Поднявшись на каждую такую вышку, геодезист измерял углы между направлениями на соседние вышки (рис. 3). Так он узнавал углы в каждом треугольнике с вершинами в этих вышках. После этого достаточно было точно измерить расстояние между любыми двумя удобными вышками, а потом уже найти все остальные расстояния с помощью... теоремы синусов!

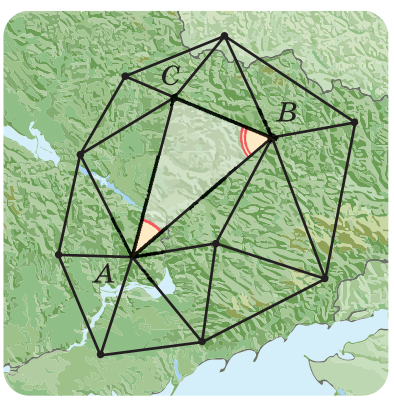
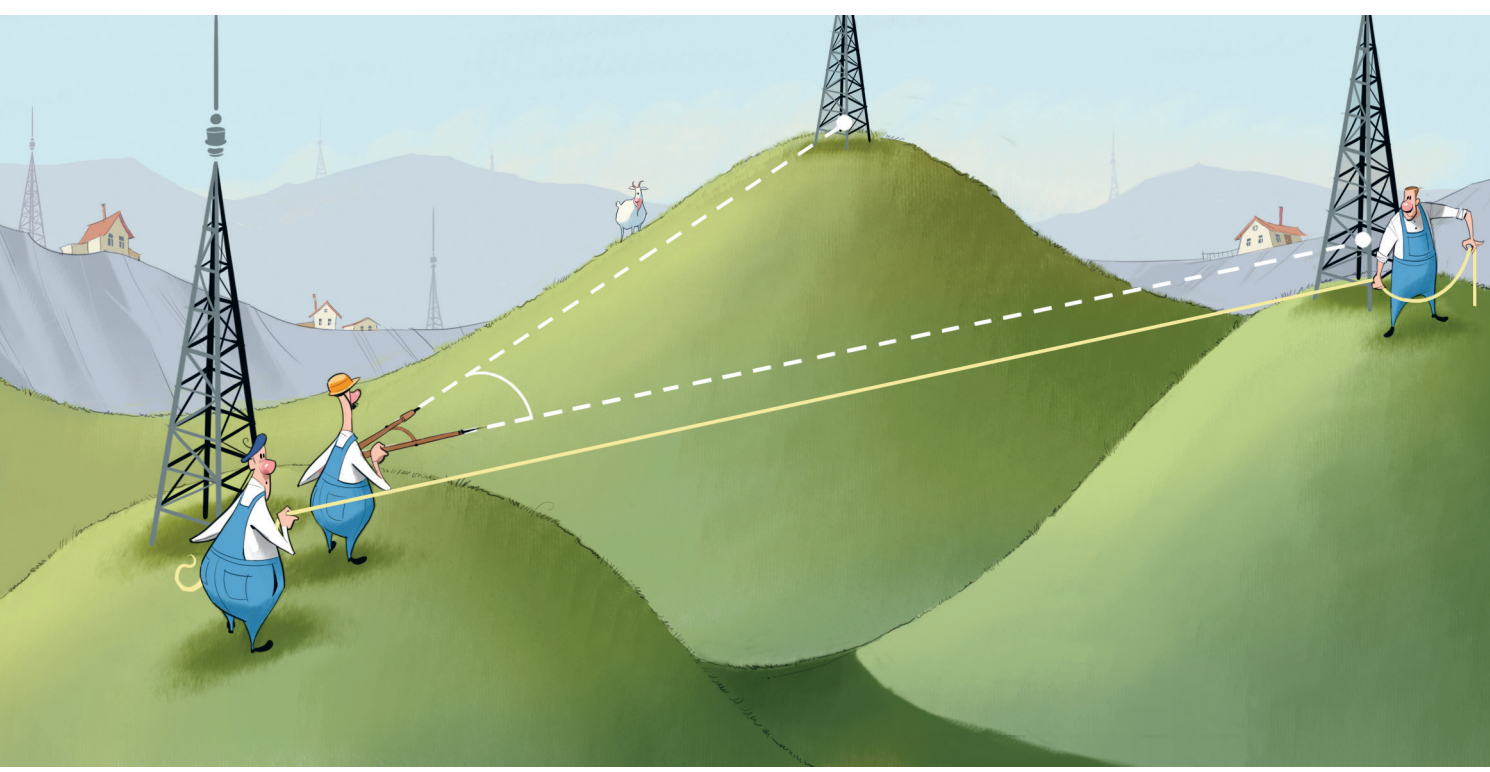


Рис. 3
Триангуляция местности



На практике, конечно, для надёжности измеряли несколько таких расстояний. А вышки триангуляции сохранились до сих пор — в горах их можно увидеть и в наши дни.

$$\frac{a}{2R} = \sin\alpha$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите на каждом рисунке длину отрезка, обозначенную буквой x (рис. 4).

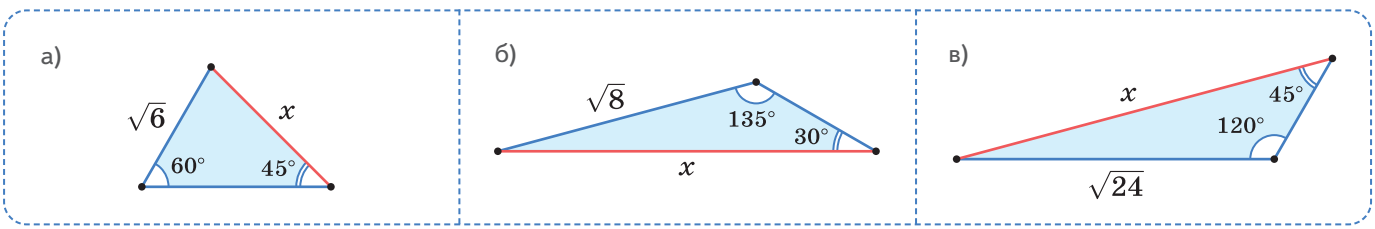


Рис. 4

2. Найдите на каждом рисунке длину отрезка, обозначенную буквой x. Стрелками на некоторых из них отмечены параллельные прямые (рис. 5).

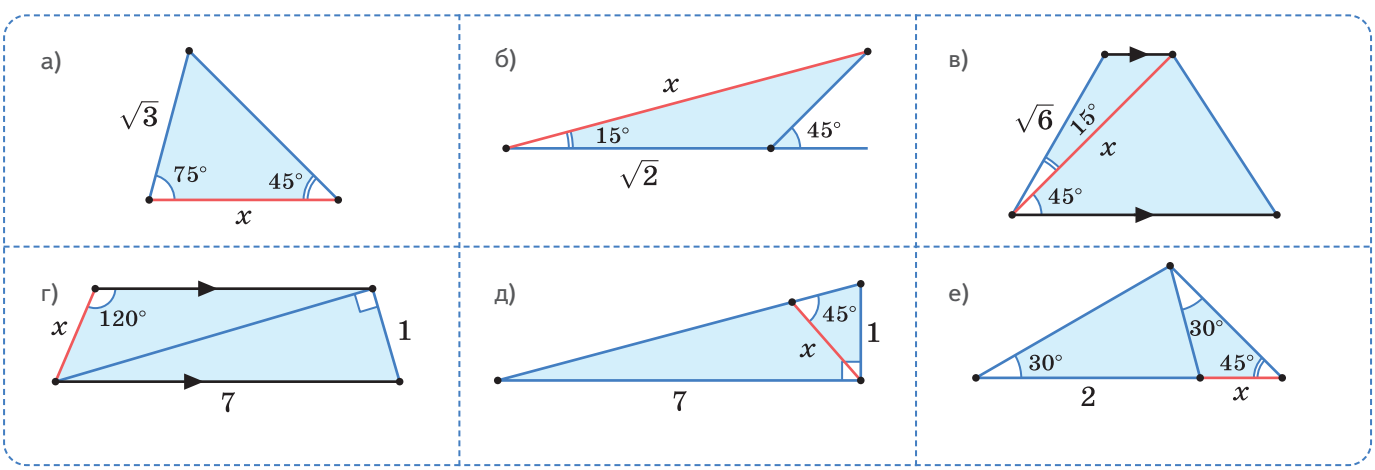


Рис. 5

3. Два угла треугольника равны 30° и 76°. Пользуясь тригонометрической таблицей, найдите бóльшую сторону этого треугольника с точностью до 1 см, если его меньшая сторона равна 50 см.

4. Два угла треугольника равны 12° и 20°, а противолежащие им стороны различаются на 15 см. Пользуясь тригонометрической таблицей, найдите эти стороны.

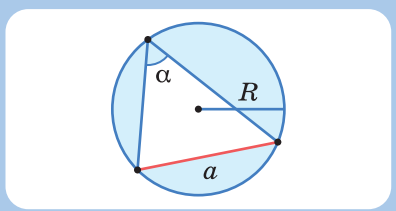
Помните, что понятие синуса возникло ещё в работах индийских астрономов и означало у них «тетиву», или хорду окружности? А греческие астрономы синусов не знали,

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

но тоже использовали для своих расчётов хорды окружности. Это было не случайно, поскольку хорда равна синусу угла, под которым она видна из точек окружности с диаметром 1. А прямую связь между ними показывает теорема синусов для хорд. Давайте её сформулируем.

ТЕОРЕМА СИНУСОВ ДЛЯ ХОРД

Отношение хорды окружности к её диаметру равно синусу угла, под которым эта хорда видна из точек данной окружности: $\frac{a}{2R} = \sin\alpha$.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть в окружности радиуса R проведена хорда BC длины a и она видна из некоторой её точки A под углом α.

Сначала разберём случай, когда $\alpha < 90°$ (рис. 6).

Проведём в окружности диаметр BE. Тогда угол BCE будет равен 90° по свойству диаметра, а угол BEC будет равен α, поскольку он равен углу BAC по теореме о вписанном угле.

Посмотрим на прямоугольный треугольник BEC. Его гипотенуза равна $2R$, а против острого угла α лежит катет длины a. Значит, по определению синуса острого угла получаем: $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$.

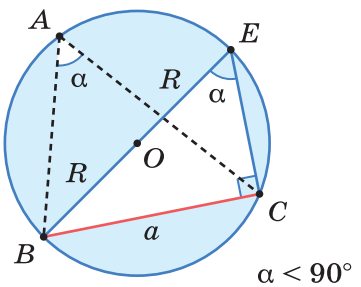


Рис. 6

А что будет, когда $\alpha > 90°$? Давайте здесь, как и в первом случае, проведём диаметр BE (рис. 7). Тогда угол BCE снова будет прямым по свойству диаметра, а угол BEC окажется равен $180° - \alpha$, поскольку четырёхугольник $ABEC$ вписан в окружность.

В прямоугольном треугольнике BEC опять мы можем написать по определению синуса острого угла: $\sin(180° - \alpha) = \frac{a}{2R}$. А по формуле приведения мы знаем, что $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$. Поэтому в этом случае тоже выполняется равенство $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$.

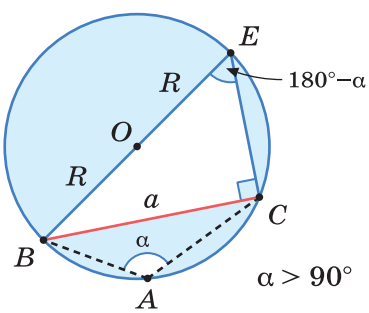


Рис. 7

Случай, когда $\alpha = 90°$, ещё проще. В нём хорда будет диаметром данной окружности, поэтому $a = 2R$ (рис. 8). Теорема останется верной и в этом случае, поскольку $\sin 90° = \frac{a}{2R} = 1$.

Итак, утверждение теоремы выполняется для любой хорды и любого угла, опирающегося на эту хорду в окружности.

Что и требовалось доказать.

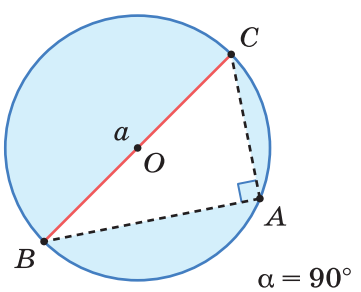


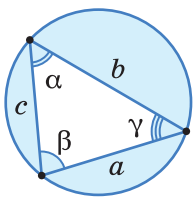
Рис. 8

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Как вы уже знаете, любой треугольник можно вписать в окружность. Поэтому теорему синусов для треугольника и теорему синусов для хорд окружности можно объединить в одно утверждение, которое называют обобщённой теоремой синусов. Давайте её сформулируем.

ОБОБЩЁННАЯ ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Отношение любой стороны в треугольнике к синусу противоположного ей угла равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.



УПРАЖНЕНИЯ

5. С помощью теоремы синусов удобно находить радиусы окружностей. Найдите радиусы окружностей, изображённых на рисунках (рис. 9).

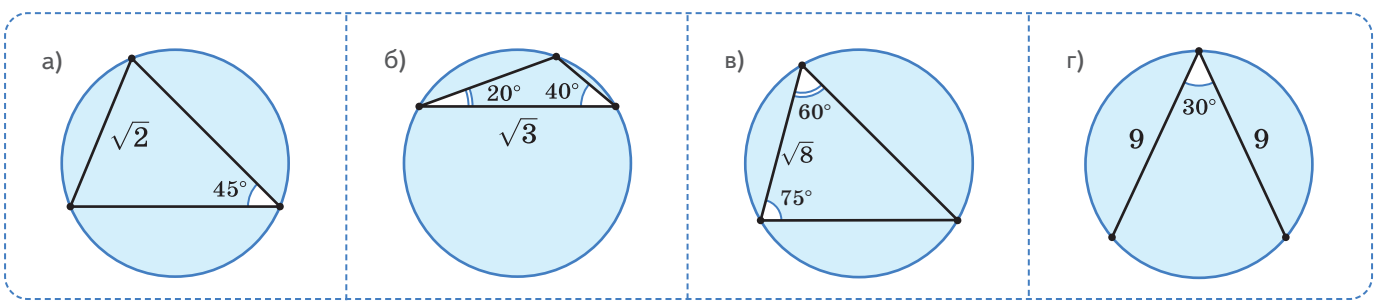


Рис. 9

6. В окружности радиуса 50 провели хорду длиной 39. С точностью до одного градуса найдите величины вписанных углов, опирающихся на данную хорду.

7. Две стороны треугольника равны 6 и 7, а высота, опущенная на его третью сторону, равна 5. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

Теорема синусов для хорд позволяет выражать стороны треугольника через его углы и радиус R окружности, в которую вписан треугольник (рис. 10). Давайте это сделаем:

$$a = 2R \cdot \sin\alpha,\ b = 2R \cdot \sin\beta,\ c = 2R \cdot \sin\gamma.$$

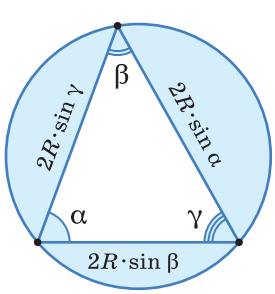


Рис. 10

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

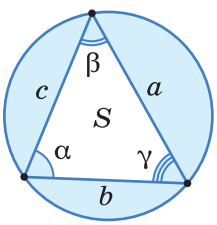
Если использовать эти выражения, то многие формулы и теоремы, уже известные для треугольника, можно будет сформулировать в новой тригонометрической форме.

Давайте покажем это на примере формул для площади треугольника.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Если треугольник со сторонами a, b, c и углами α, β, γ вписан в окружность радиуса R, то для его площади S справедливы формулы:

$$S = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma, \quad S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$



$$S = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Сначала докажем первую формулу. Возьмём уже известную вам формулу для площади треугольника $S = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ и подставим в неё выражения для его сторон a и b через радиус R описанной окружности. Тогда мы получим, что:

$$S = \frac{(2R \cdot \sin\alpha) \cdot (2R \cdot \sin\beta) \cdot \sin\gamma}{2} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

Докажем вторую формулу. По теореме синусов для стороны c и угла γ треугольника можно записать: $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$.

Если мы подставим это выражение в ту же формулу для площади треугольника, то получим:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

8. Пусть α, β и γ — углы треугольника. Докажите, что $\sin\alpha + \sin\beta > \sin\gamma$.

9. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Оказалось, что $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\gamma$. Докажите, что данный треугольник прямоугольный.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

10. Докажите, что площадь треугольника можно вычислять по формуле $S = R \cdot r\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$, где R и r — радиусы его описанной и вписанной окружностей.

11. С точностью до 0,01 найдите радиус окружности, проходящей через точки A, B и C на клетчатой бумаге (рис. 11). Сторона одной клетки равна 1.

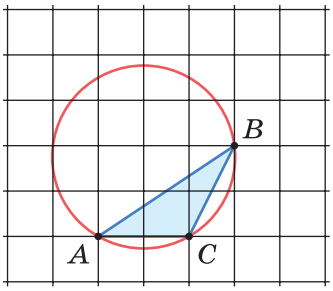


Рис. 11

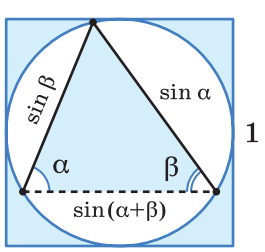
Древние астрономы составляли таблицы со значениями синуса, косинуса и тангенса для всех острых углов с шагом значительно меньше одного градуса. Для расчётов им была нужна очень хорошая точность, поэтому при составлении таких таблиц они обычно использовали следующий приём. Вначале находились значения синуса и косинуса для нескольких удобных углов с самой большой точностью, а потом они применяли формулы для синуса половинного угла, синуса суммы или разности этих углов. Зная точные значения синуса и косинуса для углов α и β, по этим формулам можно было найти значения для $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}$, $\sin(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha - \beta)$. Например, получив точные значения для синуса и косинуса углов 18°, 30° и 45°, можно по ним точно найти синус и косинус углов 12°, 15° и 3°.

Все эти расчёты проводились на геометрическом языке, на котором синусы углов являлись хордами одной окружности. Давайте на языке хорд докажем одну из важных формул — формулу синуса суммы двух углов.

$$AC \cdot BD = \\ = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

ФОРМУЛА СИНУСА СУММЫ ДВУХ УГЛОВ

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Доказательство мы проведём для углов, сумма которых не превышает 180°, ведь для расчётов в треугольниках этого вполне достаточно. Возьмём окружность, диаметр которой равен 1, и впишем в неё углы ACE и BCE с величинами α и β (рис. 12). По теореме синусов для хорд можно записать: $AE = \sin\alpha$, $BE = \sin\beta$.

На хорду AB опирается угол $\alpha + \beta$, поэтому $AB = \sin(\alpha + \beta)$.

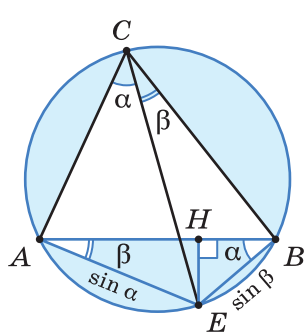


Рис. 12

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Угол ABE равен α, поскольку он равен углу ACE по теореме о вписанном угле. По той же причине угол BAE равен β.

Опустим из точки E перпендикуляр EH на хорду AB (рис. 13). Тогда $AH = AE \cdot \cos\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta$. Аналогично можно написать, что $BH = BE \cdot \cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos\alpha$. Поскольку $AB = AH + BH$, то $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

Что и требовалось доказать.

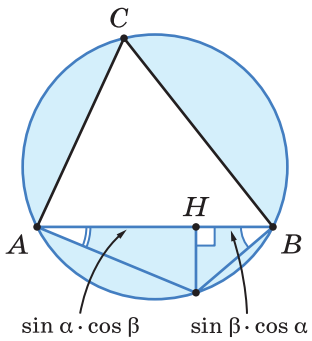
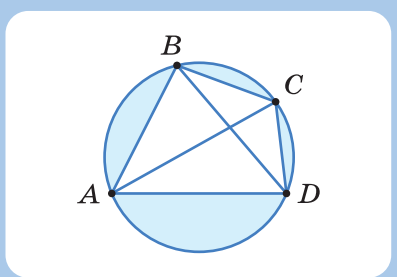


Рис. 15

Знаменитый астроном Античности Птолемей, работавший в Александрии во II веке, вместо формулы синуса суммы углов использовал теорему о вписанном в окружность четырёхугольнике. С тех пор её называют теоремой Птолемея. Давайте сформулируем её в общем случае.

ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ*

Произведение диагоналей четырёхугольника, вписанного в окружность, равно сумме произведений двух пар его противоположных сторон: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.



УПРАЖНЕНИЯ

12. Докажите, что для четырёхугольника (рис. 14) теорема Птолемея эквивалентна формуле синуса суммы двух углов $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

13. Докажите, что для четырёхугольника (рис. 15) теорема Птолемея эквивалентна формуле синуса разности двух углов $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

14. Получите точные значения $\sin 15°$, $\sin 75°$. Чему равно произведение этих значений?

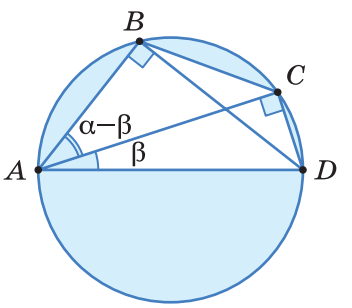


Рис. 13

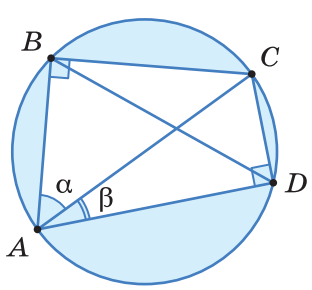


Рис. 14

Клавдий Птолемей (рис. 16) по праву считается первым астрономом Античности. Он составил самый подробный атлас звёздного неба, в котором было больше тысячи

* Доказательство теоремы Птолемея, а также связанного с ней неравенства для произвольного четырёхугольника вы можете прочитать в конце этого параграфа в разделе «Для тех, кто хочет знать больше».

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



Рис. 16
Клавдий Птолемей

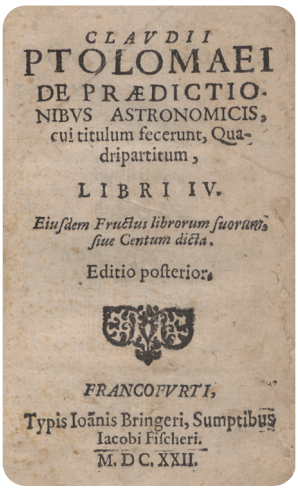

CLAVDII
PTOLOMAEI
DE PRÆDICTIO-
NIBVS ASTRONOMICIS,
cui titulum fecerunt, Qua-
dripartitum,
LIBRI IV.
Eiusdem Fructus librorum suorum,
siue Centum dicta.
Editio posterior.
FRANCOFVRTI,
Typis Ioānis Bringeri, Sumptibus
Iacobi Fischeri.
M. D C. XXII.

Рис. 17
Титульный лист «Альмагеста»



Рис. 18
Трикветрум Птолемея

звёзд, этот атлас вошёл в *Альмагест* — его великий труд по астрономии (рис. 17). Он создал астрономические таблицы, разделил угол в один градус на минуты и секунды.

Именно Птолемей придумал геоцентрическую модель мира, согласно которой Солнце и звёзды вращаются вокруг неподвижной Земли. Эту модель астрономы потом использовали больше тысячи лет, пока не появились труды Коперника. Система Птолемея могла объяснить странные блуждания по небу тех звёзд, которые греки назвали планетами. По Птолемею, планеты вращались по эпициклам — малым окружностям, центры которых сами двигались вокруг Земли по большим кругам — деферентам.

Считается, что Птолемей добавил к астролябии паук и тимпан, изобрёл специальную тройную рейку — *трикветрум* (рис. 18) для более точных наблюдений за звёздами. На гравюре (рис. 16) он держит её в руке.

ВОПРОСЫ

1. В чём заключается теорема синусов?
2. Могут ли синусы углов одного треугольника относиться между собой как 1 : 2 : 3?
3. Синусы углов треугольника относятся между собой как 3 : 4 : 5. Чему равен больший угол этого треугольника?
4. В чём заключается теорема синусов для хорд?
5. Как выражается площадь треугольника через его стороны и радиус описанной окружности?
6. Как формулируется обобщённая теорема синусов?
7. Как выражается площадь треугольника через синусы его углов и радиус описанной окружности?
8. В чём заключается теорема Птолемея? Как она связана с формулой для синуса суммы двух углов?
9. Как с помощью теоремы синусов можно доказать, что для острых углов α и β выполняется такое неравенство $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$?

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1. ★☆☆ Человек на склоне холма увидел внизу дерево под углом 45° по отношению к его поверхности. Затем он спустился по склону на 54 м и оказался возле дерева. Определите примерную высоту дерева, если угол склона равен 15° (рис. 19).

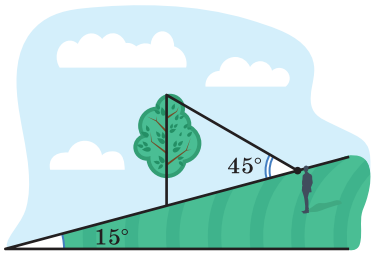


Рис. 19

РЕШЕНИЕ

Обозначим корень дерева буквой K, а его вершину — точкой D (рис. 20). Дерево растёт под прямым углом к горизонту, поэтому прямая KD перпендикулярна горизонтальной прямой AH. Из прямоугольного треугольника AKH найдём, что угол AKH равен $90° - 15° = 75°$. Углы DKC и AKH — вертикальные, поэтому угол DKC тоже равен 75°.

Когда человек находится на склоне в точке C, он видит дерево под углом DCK, равным 45°. Это позволяет найти угол при вершине D треугольника CDK: $180° - 45° - 75° = 60°$. Кроме того, по условию нам известно, что $CK = 54$ м.

Запишем теперь теорему синусов для треугольника CDK: $\frac{DK}{\sin 45°} = \frac{CK}{\sin 60°}$. Откуда следует, что

$$DK = \frac{CK \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 0{,}815 \cdot CK = 0{,}815 \cdot 54 \approx 44\,\text{м}.$$

Ответ: 44 м.

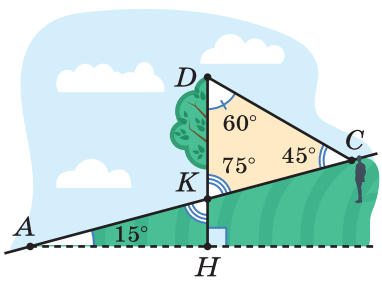


Рис. 20

ПРИМЕР 2. ★☆☆ Два угла треугольника равны 11° и 23°, а его периметр равен 285 см. Пользуясь тригонометрической таблицей, найдите большую сторону этого треугольника с точностью до 1 см.

РЕШЕНИЕ

Сначала найдём третий угол данного треугольника. Его величина равна $180° - 11° - 23° = 146°$ (рис. 21). По теореме синусов отношение сторон треугольника равно отношению синусов его углов, которые лежат против этих сторон. По тригонометрической таблице найдём, что $\sin 11° \approx 0{,}190$ и $\sin 23° \approx 0{,}390$. Синус третьего, тупого угла треугольника также можно найти по таблице, если вспомнить формулу приведения $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$. Тогда $\sin 146° = \sin(180° - 146°) = \sin 34° \approx 0{,}559$.

Поэтому можно считать, что синусы углов этого треугольника равны 0,19, 0,39 и 0,56 с точностью до 0,001. Отношение синусов этих углов будет удобно считать, если

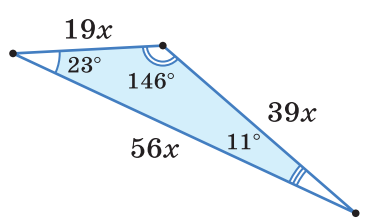


Рис. 21

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

предварительно умножить каждый из них на 100. Поэтому стороны данного треугольника будут относиться друг к другу приблизительно как 19 : 39 : 56. Значит, длины этих сторон можно обозначить как $19x$, $39x$ и $56x$, где x — некоторое положительное число. По условию периметр треугольника равен 285 см. Поэтому $19x + 39x + 56x \approx 285$. Откуда $114x \approx 285$ и $x \approx 2{,}5$. Тогда большая сторона треугольника будет равна $56x \approx 140$ см.

Ответ: 140 см

☞ Конечно, правильнее было считать, что длины сторон данного треугольника равны $19x$, $39x$ и $56x$ с ошибкой, меньшей $0{,}1x$. Тогда вместо уравнения нужно было записать двойное неравенство: $114x < 285 < 114{,}3x$. Откуда $2{,}49 < x < 2{,}5$. Поэтому $x \approx 2{,}5$ с ошибкой, меньшей 0,01. А для большей стороны треугольника ошибка будет меньше 0,56 см, т. е. меньше 1 см.

Теорема синусов нужна не только для вычисления сторон треугольника, с её помощью удобно находить длины хорд и радиусы окружностей. Давайте покажем это на нескольких примерах.

ПРИМЕР 3. ★☆☆ Окружность, вписанная в квадрат $ABCD$, касается его стороны BC в точке K. Отрезки AK и DK пересекают окружность в точках P и Q (рис. 22). Найдите длину отрезка PQ, если сторона квадрата равна 1.

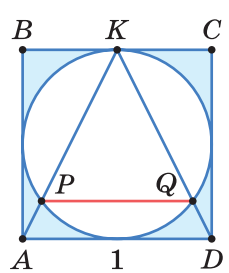


Рис. 22

РЕШЕНИЕ

Заметим, что диаметр вписанной в квадрат окружности равен стороне квадрата и касается она каждой его стороны в середине. Отрезок PQ можно найти как хорду этой окружности по теореме синусов. Для этого нам нужно вычислить синус угла AKD, под которым видна в этой окружности хорда PQ.

Поскольку точка K — середина стороны BC квадрата, то треугольники ABK и DCK равны по двум катетам. Поэтому треугольник AKD — равнобедренный и его высота KH совпадает с медианой и биссектрисой (рис. 23).

Запишем теорему Пифагора для прямоугольного треугольника AKH: $AK^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

Мы получили, что $AK = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Обозначим величину угла AKH за α. Тогда из того же треугольника AKH найдём: $\sin\alpha = \frac{AH}{AK} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{HK}{AK} = 1 : \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

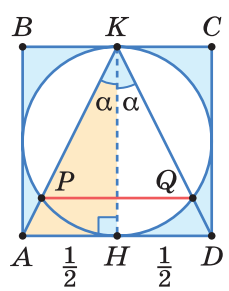


Рис. 23

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

На хорду PQ в данной окружности опирается вписанный угол PKQ, который равен 2α. Поэтому по обобщённой теореме синусов $PQ = 2R \cdot \sin 2\alpha = \sin 2\alpha$. Если же мы применим формулу для синуса двойного угла, то получим, что $PQ = \sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Ответ: 0,8.

С помощью теоремы синусов удобно находить длины отрезков даже в тех случаях, когда на чертеже не видно окружности, для которой этот отрезок являлся бы хордой. Просто нужную окружность сначала нужно провести. Покажем это на следующих примерах.

ПРИМЕР 4. ★☆☆ Два противоположных угла четырёхугольника прямые, а третий равен 45° (рис. 24). Найдите отношение диагоналей этого четырёхугольника.

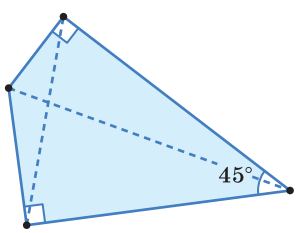


Рис. 24

РЕШЕНИЕ

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и C прямые, а угол при вершине D равен 45°. Сразу стоит сказать, что данными своими углами четырёхугольник полностью не определяется. Например, мы в принципе не сможем найти отношение его сторон, поскольку различных четырёхугольников с такими углами можно построить сколько угодно. Тем более удивительно, что отношение диагоналей во всех таких четырёхугольниках будет одно и то же. Почему это так?

Конечно, дело в том, что все четырёхугольники с данными углами обладают одной важной особенностью: их можно вписать в окружность (рис. 25). Это следует из первого признака вписанного четырёхугольника, поскольку в данном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°. Давайте впишем его в окружность, а потом применим теорему синусов для хорд, ведь диагонали AC и BD — это хорды одной окружности. Так как на хорду AC в ней опирается угол 45°, а на хорду BD — прямой угол, то $\frac{AC}{2R} = \sin 45^\circ$ и $\frac{BD}{2R} = \sin 90^\circ = 1$, где R — радиус этой окружности.

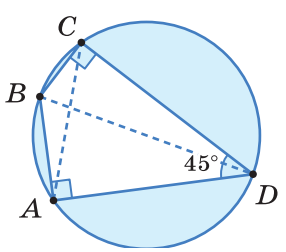


Рис. 25

Отсюда следует, что $\frac{BD}{AC} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 1 : \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ПРИМЕР 5. ★★☆ В треугольнике ABC проведена высота BH. Из точки H на его стороны опущены перпендикуляры HE и HK (рис. 26). Выразите отрезок EK через площадь S треугольника ABC и радиус R описанной около него окружности.

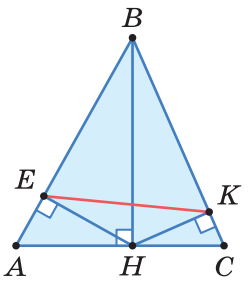


Рис. 26

РЕШЕНИЕ

Будем считать, что высота BH падает на сторону AC треугольника. Посмотрите на четырёхугольник $HEBK$: его противоположные углы BEH и BKH равны 90°. Значит, их сумма равна 180°, и по признаку этот четырёхугольник можно вписать в окружность. Диаметром этой окружности будет высота BH, поскольку на неё опираются прямые углы.

Искомый отрезок EK теперь можно найти по теореме синусов, как хорду этой окружности. Обозначим величину угла EBK буквой β, а длину высоты BH треугольника как h (рис. 27). Тогда по обобщённой теореме синусов $EK = h \cdot \sin\beta$.

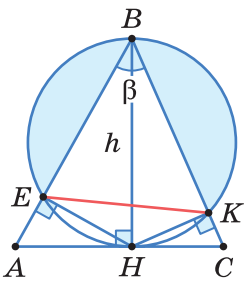


Рис. 27

По условию нам не даны ни высота h, ни величина угла β треугольника. Давайте выразим их через его площадь S и радиус R окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 28).

Поскольку $S = \frac{AC \cdot h}{2}$, то $h = \frac{2S}{AC}$. А по теореме синусов для треугольника ABC можно записать, что $\sin\beta = \frac{AC}{2R}$.

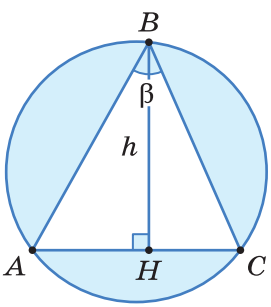


Рис. 28

Теперь найдём длину искомого отрезка:

$$EK = h \cdot \sin\beta = \frac{2S}{AC} \cdot \frac{AC}{2R} = \frac{S}{R}.$$

Ответ: $\frac{S}{R}$.

В случае, когда высота BH падает на продолжение стороны AC треугольника ABC, ответ задачи останется тем же. Нарисуйте нужный чертёж к задаче для этого случая и проверьте это.

ПРИМЕР 6. ★★★ В окружность с диаметром 25 вписан треугольник, две стороны которого равны 15 и 24. Чему может быть равна его третья сторона?

РЕШЕНИЕ

Пусть в окружность с диаметром 25 вписан треугольник ABC, стороны AC и BC которого равны 15 и 24. Обозначим величины его углов при вершинах A, B и C соответственно как α, β и γ. Синусы углов α и β можно найти по теореме синусов для хорд окружности: $\sin\alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{24}{25}$

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

и $\sin\beta = \frac{AC}{2R} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$. По той же теореме и с помощью формулы приведения можно найти сторону AB треугольника: $AB = 2R \cdot \sin\gamma = 25 \cdot \sin(180° - \alpha - \beta) = 25 \cdot \sin(\alpha + \beta)$.

А по формуле синуса суммы углов мы знаем, что $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

Таким образом, нам осталось вычислить $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ и подставить их в последнюю формулу.

Как же, зная синус угла, вычислить его косинус? Как раз для этого мы можем воспользоваться основным тригонометрическим тождеством: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Подставим в него уже найденное нами значение $\sin\alpha$. Тогда мы получим, что $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{25^2 - 24^2}{25^2} = \left(\frac{7}{25}\right)^2$.

Аналогично $\cos^2\beta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$.

Помните, что косинус острого угла должен быть положительным, а тупого угла — отрицательным? Но каким будет угол α — острым или тупым? Оказывается, что оба этих варианта возможны — они показаны на рисунках 29, 30. Это вполне естественно: хорду AC относительно прямой BC можно отложить в одну или в другую полуплоскость. Итак, $\cos\alpha$ может принимать два значения: $\cos\alpha = \pm\frac{7}{25}$.

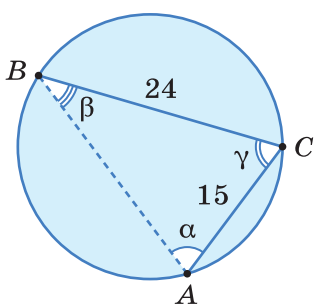


Рис. 29

А что можно сказать про угол β? Поскольку $AC < BC$, то в треугольнике ABC должно быть $\beta < \alpha$. Значит, угол β острый и его косинус может быть только положительным. Поэтому $\cos\beta = +\frac{4}{5}$.

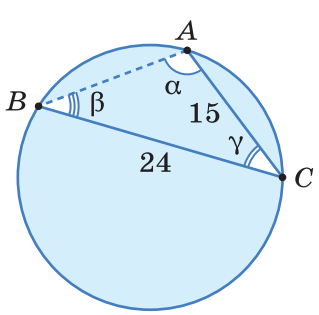


Рис. 30

Итак, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{24}{25} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{25} \cdot \frac{3}{5} = \frac{117}{125}$, или $\sin(\alpha + \beta) = \frac{24}{25} \cdot \frac{4}{5} - \frac{7}{25} \cdot \frac{3}{5} = \frac{75}{125} = \frac{3}{5}$.

Таким образом, длина стороны AB треугольника тоже может принимать два значения:

либо $AB = 25 \cdot \sin(\alpha + \beta) = 25 \cdot \frac{117}{125} = 23{,}4$,

либо $AB = 25 \cdot \sin(\alpha + \beta) = 25 \cdot \frac{3}{5} = 15$.

Ответ: 15 или 23,4.

ПРИМЕР 7. ★★★ Окружность, вписанная в четырёхугольник $ABCD$, касается его противоположных сторон BC и AD в точках K и E, причём $BK = b$, $DE = d$. Отрезок KE пересекает диагональ BD четырёхугольника в точке M (рис. 31). Докажите, что $BM : MD = b : d$.

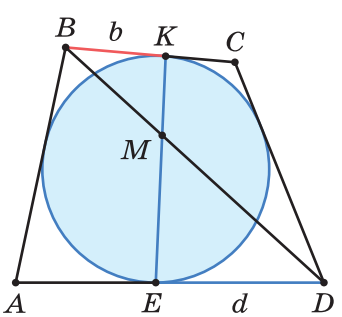


Рис. 31

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим углы AEK и BKE, которые образует хорда KE окружности с касательными BK и AE (рис. 32). Каждый из этих углов равен половине градусной меры дуги KE данной окружности, которая лежит внутри каждого из них. Значит, эти углы равны, поэтому на чертеже мы обозначили их величину одной буквой α.

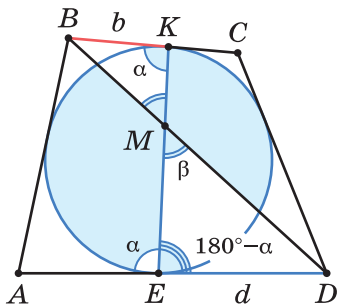


Рис. 32

Рассмотрим треугольники MBK и MDE. Их углы с вершиной в точке M равны, как вертикальные. Обозначим их величину буквой β. Угол MED равен $180° - \alpha$, поскольку он смежный с углом AEM. А теперь давайте запишем теорему синусов для треугольника MBK: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{BM}{BK} = \frac{BM}{b}$. По той же теореме для треугольника MDE имеем: $\frac{\sin(180° - \alpha)}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{DM}{ED} = \frac{DM}{d}$.

Значит, должно выполняться равенство $\frac{BM}{b} = \frac{DM}{d}$.

Его можно переписать так: $\frac{BM}{DM} = \frac{b}{d}$.

Что и требовалось доказать.

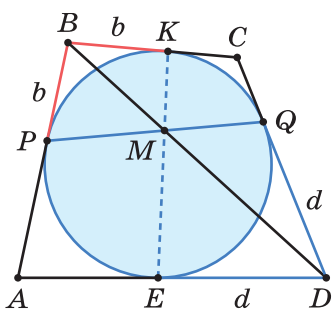
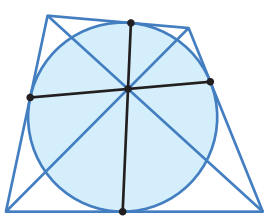


Рис. 33

Так же, как в последнем примере, можно доказать, что отрезок PQ, соединяющий точки касания вписанной в четырёхугольник $ABCD$ окружности с его сторонами AB и CD, делит диагональ BD в том же отношении $b : d$. Это следует из равенства отрезков касательных: $BP = b$ и $DQ = d$ (рис. 33).

Значит, отрезки KE и PQ проходят через одну точку M на диагонали BD. Более того — через точку M проходит и диагональ AC четырёхугольника. Поэтому верно следующее утверждение*:


Рис. 34

отрезки, соединяющие точки касания вписанной окружности с противоположными сторонами четырёхугольника, проходят через точку пересечения его диагоналей (рис. 34).

Теорема синусов — одна из универсальных теорем геометрии. Это значит, что из этой теоремы, так же как из теоремы Пифагора, можно вывести большинство других её теорем. Мы делать этого не будем, зато посмотрим, как с помощью теоремы синусов можно решать задачи, которые на первый взгляд не имеют к ней никакого отношения. Если в такой задаче нужно найти длину отрезка, то искать

* Данное утверждение является частным случаем теоремы Брианшона о шестиугольнике, в который можно вписать окружность.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

его зачастую проще вместе с углом треугольника, для которого этот отрезок — противоположная сторона. В таких случаях на чертеже мы будем обозначать неизвестный угол буквой, потом запишем теорему синусов для треугольников, которые связаны с этим углом, и решим систему уравнений. Можно сказать, что рассматриваемый угол — просто удобный инструмент, нужный для составления такой системы. Поэтому мы назовём его вспомогательным. Давайте посмотрим, как работает метод вспомогательного угла на примере.

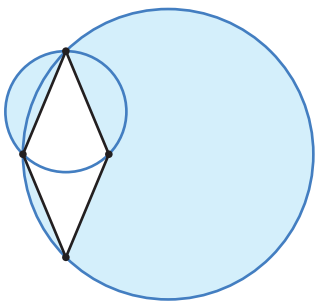


Рис. 35

ПРИМЕР 8. ★★★ На каждой из двух окружностей с радиусами 5 и 12 лежат по три вершины ромба (рис. 35). Найдите его сторону.

РЕШЕНИЕ

Пусть ромб $ABCD$ расположен так, что его вершины A, B и C лежат на окружности радиуса 5, а вершины A, B и D — на окружности радиуса 12. Обозначим сторону ромба через x, а величину угла BAC через α (рис. 36). Тогда по теореме синусов для хорды BC в окружности радиуса 5 можно записать, что $\sin\alpha = \frac{x}{10}$.

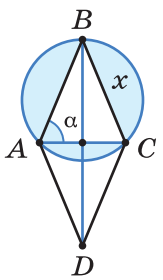


Рис. 36

А теперь сделаем то же самое для второй окружности радиуса 12. Пусть величина вписанного в неё угла ABD равна β (рис. 37). Тогда $\sin\beta = \frac{x}{24}$.

Нам осталось вспомнить, что диагонали ромба перпендикулярны друг другу, поэтому $\alpha + \beta = 90°$ (рис. 38). Значит, $\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

И мы получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными x и α: $\begin{cases} \sin\alpha = \frac{x}{10}, \\ \cos\alpha = \frac{x}{24}. \end{cases}$

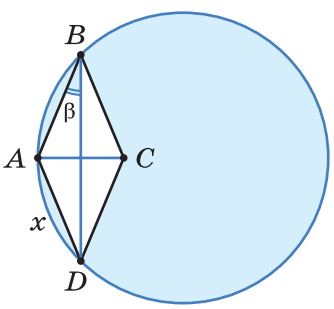


Рис. 37

Поскольку нам нужно найти сторону ромба, попробуем сразу исключить из этой системы угол α. Сделать это проще всего, применив основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Итак, давайте возведём оба уравнения нашей системы в квадрат и сложим их. Тогда мы получим уравнение с одной неизвестной x: $\left(\frac{x}{10}\right)^2 + \left(\frac{x}{24}\right)^2 = 1$.

Откуда найдём, что $x = \frac{120}{13}$.

Ответ: $\frac{120}{13}$.

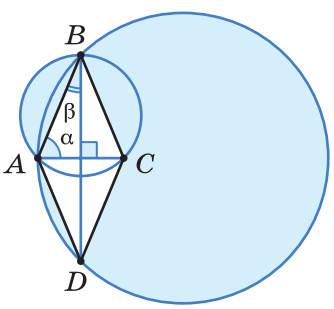


Рис. 38

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ЗАДАЧИ

1. ★☆☆ Два угла треугольника равны 16° и 30°. Сторона треугольника, лежащая против большего из этих углов, равна 20 см. Найдите его сторону, лежащую против меньшего из данных углов, с точностью до 1 мм.

2. ★☆☆ Меньшая сторона параллелограмма равна 1 м. Найдите его большую сторону с точностью до 1 см, если диагональ параллелограмма образует с этими сторонами углы 23° и 46°.

3. ★☆☆ На гору идут две канатные дороги: одна из них расположена над крутым её склоном, который составляет 45° с горизонтом, а другая — над пологим, образующим с горизонтом угол 30°. Группа туристов поднималась на гору по первой дороге 20 минут со скоростью 3 м/с. Сколько времени займёт спуск с этой горы по второй дороге, если её скорость 5 м/с? (⏩ рис.)

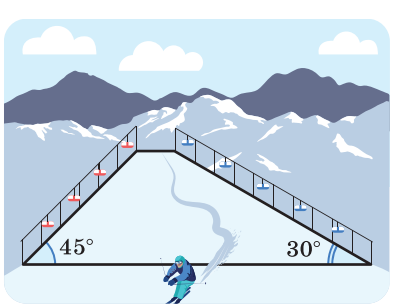
4. ★☆☆ Во время Второй мировой войны для обнаружения в ночном небе немецких бомбардировщиков силами советской противовоздушной обороны использовались зенитные прожекторы с диаметром 1,5 м. Луч такого прожектора доставал цель на расстоянии до 7 км и мог сопровождать её в небе для того, чтобы по ней могли вести огонь зенитные орудия. Прожектор поймал немецкий самолёт под углом 45° к горизонту на пределе своей видимости и сопровождал его на постоянной высоте его до угла 60°, пока тот не был подбит зениткой. а) На каком расстоянии от прожектора находился в этот момент самолёт? б) На какой высоте он летел? в) Какое время следил за ним прожектор, если средняя скорость бомбардировщика равнялась 300 км/ч? (⏩ рис.)

5. ★☆☆ Может ли угол между боковой стороной равнобедренного треугольника и его медианой, проведённой к другой боковой стороне, быть больше 30°?

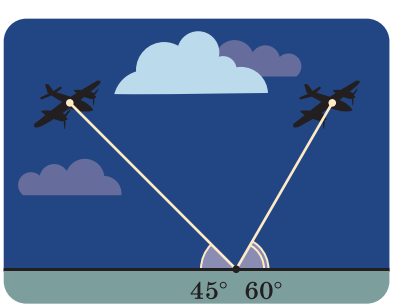
6. ★☆☆ Диагональ равнобедренной трапеции образует с одной её боковой стороной угол 30°, а с другой — 45°. Найдите отношение оснований трапеции.

7. ★☆☆ Три угла четырёхугольника в указанном порядке равны 30°, 60° и 150°. Найдите отношение его диагоналей.

8. ★☆☆ Для того чтобы поразить военный корабль торпедой с подводной лодки, её нос нужно развернуть по направлению выстрела. Наводчик торпедного аппарата должен стрелять в движущуюся цель с упреждением, то есть отправить торпеду в точку, лежащую перед кораблём по ходу его движения. Линейный корабль идёт со скоростью 20 узлов курсом, который образует с направлением на него корпуса подводной лодки 60°.



⏩ задача 3

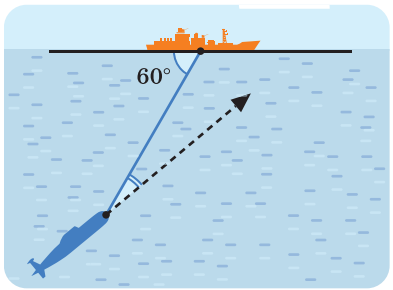


⏩ задача 4а

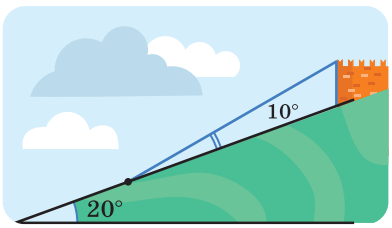


⏩ задача 4б

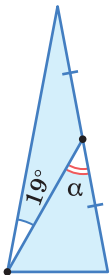
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 8



задача 9



задача 10

На сколько градусов от цели нужно повернуть подводную лодку в момент выстрела, если скорость торпеды составляет 50 узлов? (▸▸ рис.)

9. ★☆☆ Человек стоит на склоне горы и видит выше себя на склоне стену крепости под углом 10° к этому склону. Найдите расстояние от человека до верхней точки стены крепости, если высота её стен равна 20 м, а угол склона горы равен 20°. (▸▸ рис.)

10. ★☆☆ Угол между боковой стороной равнобедренного треугольника и его медианой, проведённой к другой боковой стороне, равен 19°. Найдите угол, который образует эта медиана с другой боковой стороной данного треугольника, с точностью до 1°. (▸▸ рис.)

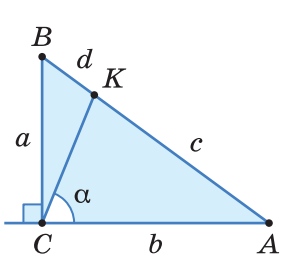
11. ★☆☆ Отрезок соединяет вершину равнобедренного треугольника с произвольной точкой на его основании и разбивает данный треугольник на два треугольника. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около двух этих треугольников, равны.

12. ★☆☆ В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H. Докажите, что окружность, проходящая через точки A, C и H, равна окружности, описанной около треугольника ABC.

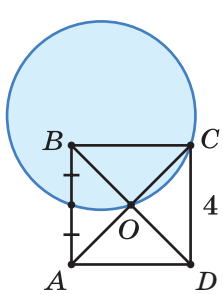
13. ★☆☆ Прямая проходит через вершину C прямого угла треугольника ABC и делит его гипотенузу на отрезки AK и BK с длинами c и d. Найдите тангенс угла ACK, если катеты CB и CA треугольника равны a и b. (▸▸ рис.)

14. ★☆☆ Сторона квадрата $ABCD$ равна 4. Найдите радиус окружности, проходящей через середину стороны AB, центр квадрата и вершину C. (▸▸ рис.)

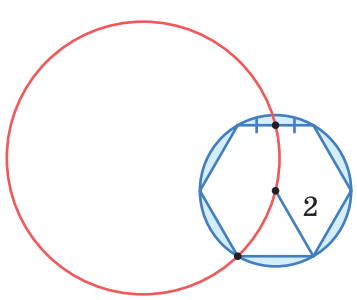
15. ★☆☆ В окружность радиуса 2 вписан равносторонний шестиугольник. Найдите радиус окружности, проходящей через его вершину, середину противоположной стороны и центр шестиугольника. (▸▸ рис.)



задача 13

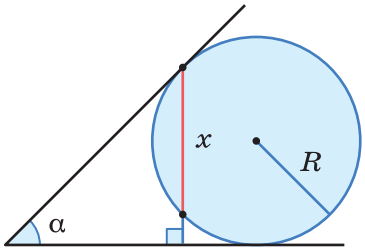


задача 14

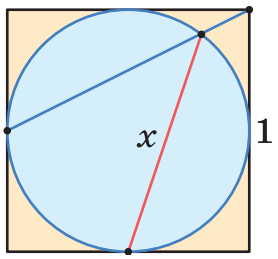


задача 15

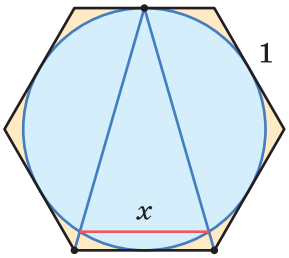
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 16



задача 17



задача 18

16. ★☆☆ Окружность радиуса R вписана в угол величины α. Из точки её касания с одной из сторон угла на другую его сторону опустили перпендикуляр. Найдите длину хорды окружности, лежащей на этом перпендикуляре. (▸▸ рис.)

17. ★★☆ В квадрат со стороной 1 вписана окружность. Найдите длину отрезка, обозначенного на рисунке буквой x. (▸▸ рис.)

18. ★★☆ В правильный шестиугольник со стороной 1 вписали окружность. Точку её касания с одной из его сторон соединили с концами противоположной стороны. Найдите длину хорды, которую высекает на окружности полученный угол. (▸▸ рис.)

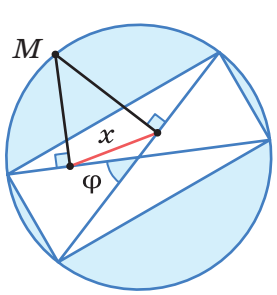
19. ★★☆ Из произвольной точки M окружности, описанной около прямоугольника, на две его диагонали опустили перпендикуляры. Найдите длину x отрезка, соединяющего основания этих перпендикуляров, если диагонали прямоугольника равны d, а угол между ними равен φ. (▸▸ рис.)

20. ★★☆ Окружность радиуса R проходит через вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$ и второй раз пересекает прямые AD и CD в точках M и K. Найдите длину отрезка MK, если острый угол параллелограмма равен α. (▸▸ рис.)

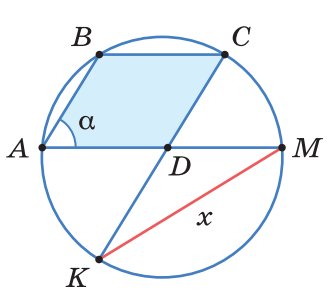
21. ★★☆ Один угол треугольника в 2 раза меньше другого, а противолежащие стороны равны 5 и 8. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

22. ★★☆ Отрезок, соединяющий основания двух высот треугольника, равен радиусу описанной около него окружности. Найдите угол между теми сторонами треугольника, к которым проведены высоты.

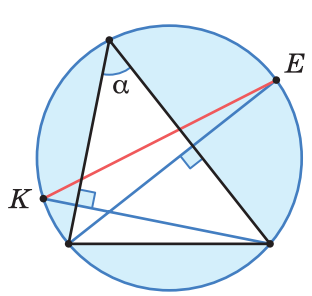
23. ★★☆ В окружность радиуса R вписан треугольник с углом α. Продолжения двух его высот, опущенных из двух других его углов, пересекают эту окружность в точках K и E. Найдите длину отрезка KE. (▸▸ рис.)



задача 19



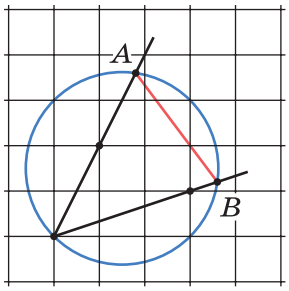
задача 20



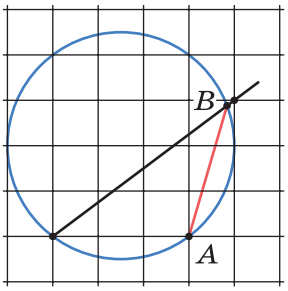
задача 23

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

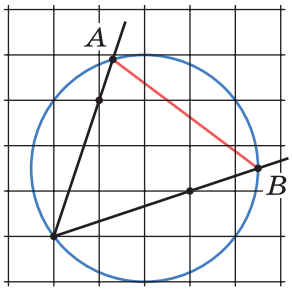
а)



б)



в)



задача 24

24. ★★☆ Найдите длину отрезка AB на клетчатой бумаге, если сторона одной клетки равна 1. (рис.)

25. ★★☆ Докажите, что для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна его третьей стороне.

26. ★★☆ Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, а его основание — 8. На продолжение боковой стороны опустили высоту AH. Найдите расстояние x между проекциями точки H на стороны AB и AC треугольника. (рис.)

27. ★★☆ Вне единичного квадрата $ABCD$ взята точка E так, что угол CBE равен 30°, а угол AED равен 45°. Найдите отрезок AE. (рис.)

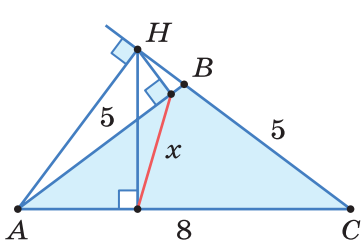
28. ★★☆ Вне равностороннего треугольника ABC взята точка E так, что угол EAB равен 15°, а угол ABE равен 75°. Найдите расстояние от данной точки до середины стороны BC, если сторона треугольника равна 1.

29. ★★☆ Высоты AM и CN треугольника ABC пересекаются в точке H. Найдите длину отрезка BH, если $AC = b$, а угол ABC равен β. (рис.)

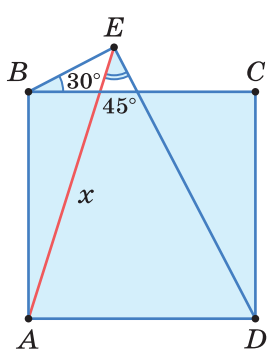
30. ★★☆ В треугольнике ABC провели высоты AM и CN. Из точки N на сторону BC опустили перпендикуляр NK, а из точки M на высоту CN — перпендикуляр ME. Найдите длину отрезка KE, если $AC = b$, а угол ABC равен β. (рис.)

31. ★★☆ Отрезок между серединами соседних сторон ромба виден из его противоположной вершины под углом 30°. Найдите острый угол этого ромба с точностью до 1°. (рис.)

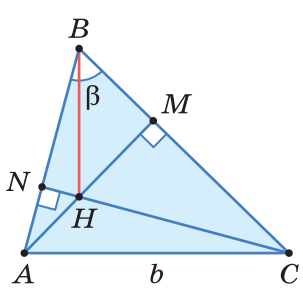
32. ★★☆ Человек находится на склоне оврага и видит верхушку дерева, стояще-



задача 26

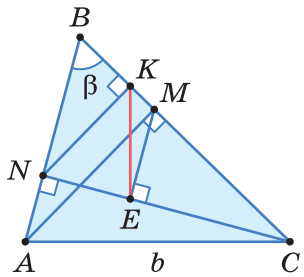


задача 27

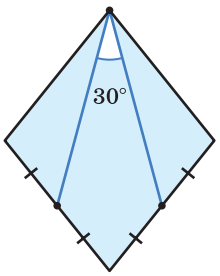


задача 29

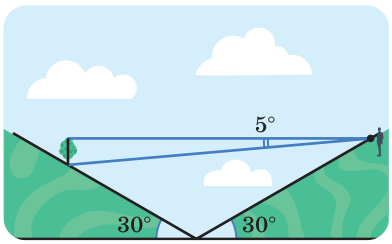
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 30



задача 31



задача 32

го на другом его склоне, на уровне своих глаз. Всё дерево из этой точки видно под углом 5°. Найдите расстояние от данного места до нижней точки оврага, если склоны идут под углом 30°, а высота дерева равна 20 м. (▸▸ рис.)

33. ★★☆ Прямая пересекает основание AC равнобедренного треугольника ABC в точке E, а прямые AB и BC соответственно в точках M и K. Докажите, что $AM : CK = AE : CE$.

34. ★★☆ Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке M, а прямые BC и AD — в точке K. Найдите отрезок BK, если $DM = 3$, $AM = 4$, $AK = 5$. (▸▸ рис.)

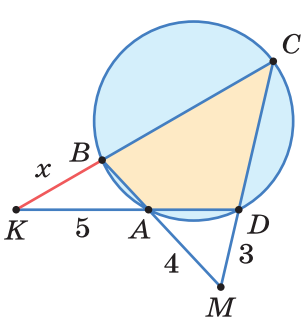
35. ★★☆ В окружности проведены две перпендикулярные хорды AB и CD. Найдите радиус окружности, если $AC = a$, $BD = b$.

36. ★★☆ Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, а его диагонали пересекаются в точке E. Известно, что $CD = ED$, $AD = 5$, $BC = 6$. Найдите радиус окружности. (▸▸ рис.)

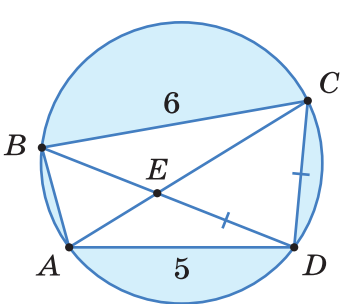
37. ★★☆ В окружность радиуса 5 вписана трапеция с боковой стороной, равной 8. Найдите радиус окружности, проходящей через концы боковой стороны трапеции, и точку пересечения её диагоналей.

38. ★★☆ Стороны AB и BC треугольника равны 8 и 6, а угол между ними 150°. Из точки M, находящейся в одной полуплоскости с треугольником относительно прямой AC, эти стороны видны под углами 30°. Найдите отрезок MB. (▸▸ рис.)

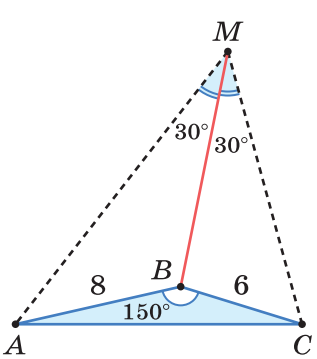
39. ★★☆ В прямоугольной трапеции $ABCD$ угол D равен 60°. Из точки A на сторону CD опущен перпендикуляр AH, а на стороне AB взята точка E так, что отрезок CE параллелен отрезку AH. Найдите отношение $BH : DE$. (▸▸ рис.)



задача 34

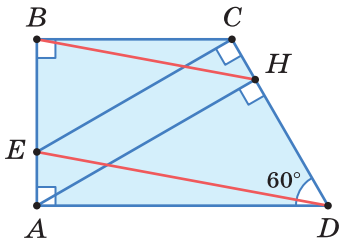


задача 36

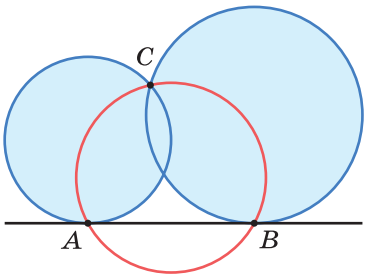


задача 38

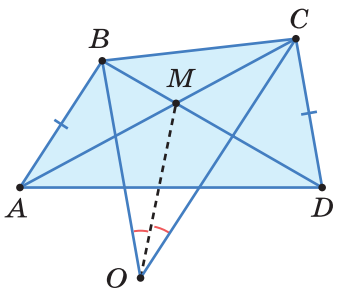
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 39



задача 40



задача 43

40. ★★★ Две окружности с радиусами R и r пересекаются в точке C. Прямая касается данных окружностей в точках A и B. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, B и C. (▸▸ рис.)

41. ★★★ В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $AO = OD$, а стороны AB, BC и CD равны. Найдите угол AOD, если его сторона AD не параллельна стороне BC.

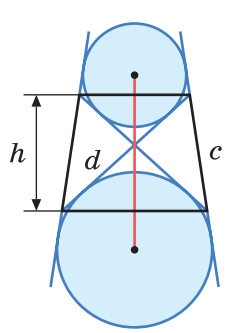
42. ★★★ В окружность вписана трапеция, разность оснований которой равна расстоянию от центра окружности до точки пересечения диагоналей. Найдите угол между диагоналями трапеции.

43. ★★★ В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M, а стороны AB и CD равны. Через точки B и C параллельно данным сторонам CD и AB провели прямые, которые пересеклись в точке O. Докажите, что луч MO — биссектриса угла BOC. (▸▸ рис.)

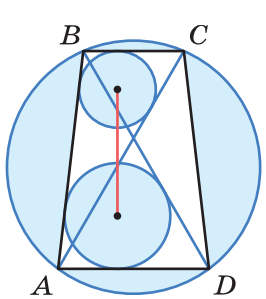
44. ★★★ Диагональ равнобокой трапеции равна d, её высота равна h, а боковая сторона — c. Найдите расстояние между центрами двух окружностей, каждая из которых касается диагоналей трапеции и продолжений её боковых сторон. (▸▸ рис.)

45. ★★★ В окружность вписана трапеция с основаниями BC и AD, диагональ которой равна сумме оснований. Докажите, что расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABC и ABD, равно радиусу окружности, описанной около трапеции. (▸▸ рис.)

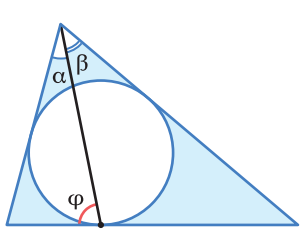
46. ★★★ Точку касания основания треугольника и вписанной в него окружности соединили с противоположной вершиной. Полученный отрезок образует с двумя другими сторонами треугольника углы α и β. Найдите косинус острого угла φ между этим отрезком и основанием треугольника. (▸▸ рис.)



задача 44

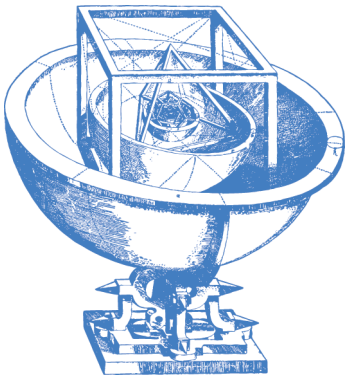


задача 45



задача 46

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



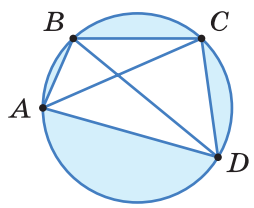
ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Клавдий Птолемей использовал теорему о вписанном в окружность четырёхугольнике для получения синуса суммы и разности двух углов. Но эта замечательная теорема и сама по себе имеет большую ценность для геометрии. Птолемей доказывал свою теорему через подобие треугольников. Мы же докажем её методом площадей. Но сначала вспомним, в чём она заключается.

$$AC \cdot BD = \\ = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ

Произведение диагоналей четырёхугольника, вписанного в окружность, равно сумме произведений двух пар его противоположных сторон: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть в окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, длины сторон AB, BC, CD и AD которого соответственно равны a, b, c и d (рис. 39). Обозначим угол между диагоналями четырёхугольника как φ и сделаем дополнительное построение: проведём в окружности хорду AE параллельно диагонали BD. Тогда четырёхугольник $ABDE$ будет трапецией (или прямоугольником). Поскольку трапеция, вписанная в окружность, должна быть равнобедренной, то $ED = AB = a$, $BE = AD = d$. Значит, треугольники ABD и EDB будут равны по трём сторонам. Поэтому угол EBD будет равен углу ADB, а площадь четырёхугольника $ABCD$ будет равна площади четырёхугольника $BCDE$.

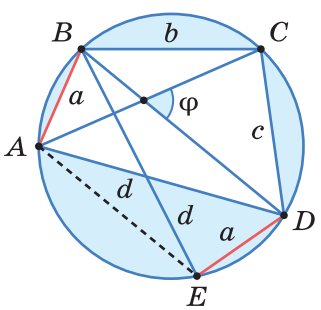


Рис. 39

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Заметим, что углы ACB и ADB равны, поскольку они опираются на одну дугу окружности. Поэтому на рисунке мы обозначим их одной буквой α. Пусть диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, а угол CBD равен γ (рис. 40). Тогда угол CKD между диагоналями четырёхугольника будет равен $\alpha + \gamma$, поскольку он является внешним углом треугольника BCK. Значит, угол EBC будет равен $\alpha + \gamma = \varphi$.

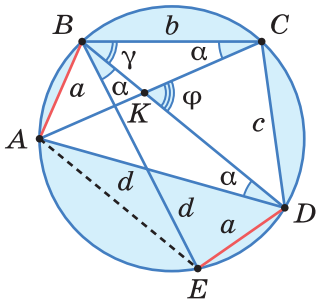


Рис. 40

Давайте выразим площадь четырёхугольника $ABCD$ по формуле через его диагонали и угол между ними: $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \sin\varphi$.

А теперь запишем площадь четырёхугольника $BCDE$ через его стороны и угол φ (рис. 41): $S_{BCDE} = S_{EBC} + S_{ECD} = \frac{b \cdot d \cdot \sin\varphi}{2} + \frac{a \cdot c \cdot \sin(180° - \varphi)}{2} = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{2} \cdot \sin\varphi$.

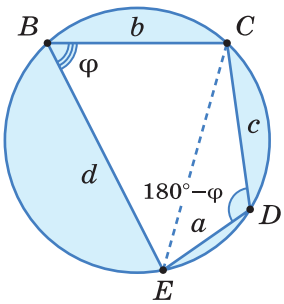


Рис. 41

Мы уже доказали, что площади четырёхугольников $ABCD$ и $BCDE$ равны. Значит, $\frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \sin\varphi = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{2} \cdot \sin\varphi$. А поскольку угол φ между диагоналями четырёхугольника отличен от нуля и $\sin\varphi \neq 0$, то $AC \cdot BD = a \cdot c + b \cdot d = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

Что и требовалось доказать.

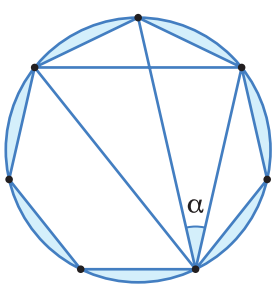
ЗАДАЧИ

47. ★☆☆ Произвольную точку на окружности, описанной около равностороннего треугольника, соединили с его вершинами. Докажите, что один из трёх полученных отрезков равен сумме двух других.

48. ★☆☆ Основания равнобедренной трапеции равны a и b, а её боковые стороны равны c. Найдите диагональ этой трапеции.

49. ★★☆ Известно, что $\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 180°$.
С помощью теоремы Птолемея докажите тождество: $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\gamma + \varepsilon) = \sin\alpha \cdot \sin\gamma + \sin\beta \cdot \sin\varepsilon$.

50. ★★☆ На рисунке изображён вписанный в окружность правильный семиугольник, в котором провели несколько диагоналей. Обозначим буквой α угол, равный $\frac{180°}{7}$.
С помощью теоремы Птолемея и данного рисунка докажите тождество: $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha}$. (⏩ рис.)



⏩ задача 50

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

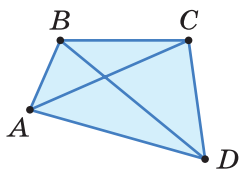
Теорема Птолемея выполняется для всех четырёхугольников, которые можно вписать в окружность. Она представляет собой равенство для произведений его сторон и диагоналей. А для произвольных четырёхугольников будет верно уже неравенство, которое напрямую связано с данной теоремой. Поэтому его иногда называют неравенством Птолемея. Это неравенство очень просто формулируется, но является совершенно не очевидным. Мы докажем неравенство Птолемея для выпуклых четырёхугольников, используя теорему синусов и неравенство треугольника.

НЕРАВЕНСТВО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

Произведение диагоналей любого четырёхугольника не превосходит суммы произведений двух пар его противоположных сторон:

$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot AD.$

Причём равенство будет только в случае, когда четырёхугольник вписан в окружность.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Опустим из вершины C выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикуляры CM, CN и CK соответственно на прямые AB, BD и AD (рис. 42). Обозначим величины углов треугольника ABD как α, β и γ. Впишем треугольник ABD в окружность и обозначим её радиус за R.

Четырёхугольник $BMCN$ тоже можно вписать в свою окружность по первому признаку, поскольку сумма его противоположных углов равна 180°. Поэтому углы MCN и ABD будут равны β (рис. 43). Так как угол BMC равен 90°, то отрезок BC — диаметр этой окружности. Найдём хорду MN по теореме синусов: $MN = BC \cdot \sin\beta$.

А теперь по теореме синусов найдём хорду AD в окружности радиуса R: $AD = 2R \cdot \sin\beta$. Следовательно, должно выполняться равенство $BC \cdot AD = MN \cdot 2R$.

Совершенно так же можно доказать, что четырёхугольники $DNCK$ и $AMCK$ можно вписать в свои окружности и получить аналогичные два равенства:

$$CD \cdot AB = KN \cdot 2R \text{ и } AC \cdot BD = MK \cdot 2R.$$

Какое отношение имеют все наши выкладки к неравенству четырёхугольника? Вы наверняка заметили, что все входящие в это неравенство произведения его сторон и диагоналей мы выразили через отрезки MN, NK и MK. Эти отрезки соединяют между собой точки M, N и K

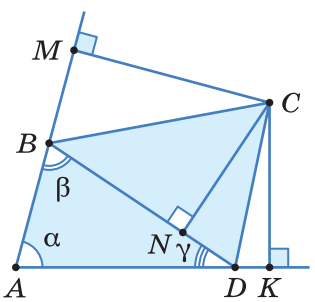


Рис. 42

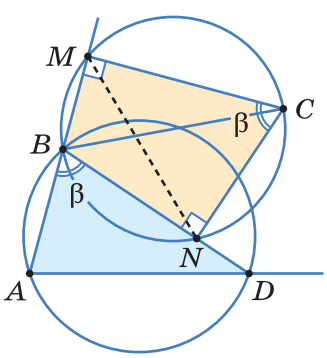


Рис. 43

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

на плоскости, и потому каждый из них не превышает суммы двух других (рис. 44). Значит, по неравенству треугольника должно быть $MK \leqslant MN + NK$. Умножим все части этого неравенства на $2R$: $MK \cdot 2R \leqslant MN \cdot 2R + NK \cdot 2R$.

А теперь давайте подставим в это неравенство выражения, найденные нами по теореме синусов. Тогда мы сразу получим нужное нам неравенство четырёхугольника: $AC \cdot BD \leqslant BC \cdot AD + CD \cdot AB$.

Что и требовалось доказать.

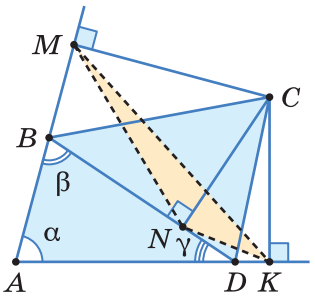


Рис. 44

Когда же данное неравенство станет равенством? Очевидно, что это будет только в том случае, когда точка N будет лежать на отрезке MK. Можно доказать, что тогда четырёхугольник $ABCD$ должен быть вписан в окружность. Сделайте это самостоятельно, пользуясь рисунками 45 и 46.

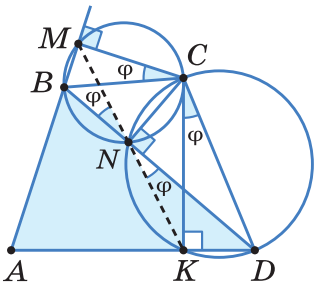


Рис. 45

ЗАДАЧИ

51. ★☆☆ Произвольную точку плоскости соединили отрезками с тремя вершинами равностороннего треугольника. Докажите, что из трёх полученных отрезков можно сложить треугольник либо один из этих отрезков равен сумме двух других.

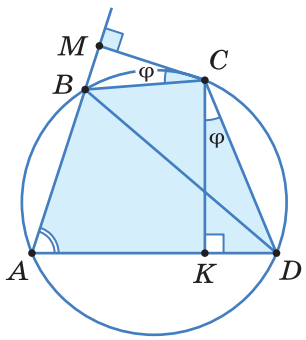
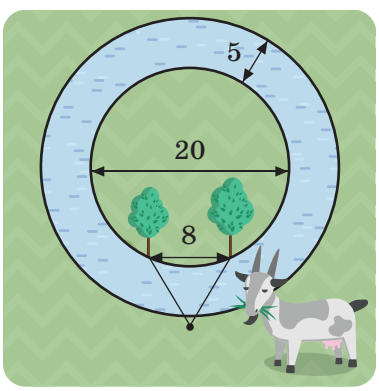


Рис. 46

52. ★★☆ В английском парке есть круглый пруд, берег которого порос свежей травой. Внутри пруда расположен круглый остров диаметром 20 м. Расстояние от острова до берега пруда всюду равно 5 м. Садовник хочет, чтобы его коза целый день паслась на берегу пруда и далеко не уходила. Для этого он привязал её через кольцо верёвкой к двум деревьям, которые растут на острове у самой воды. Расстояние между этими деревьями равно 8 м. Чему может быть равна самая меньшая длина верёвки, если коза боится заходить в воду? (⏩ рис.)

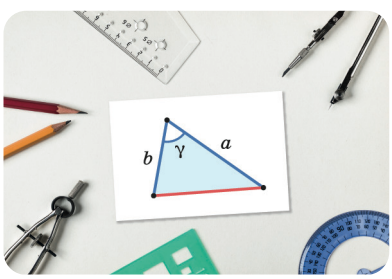


53. ★★★ Сумма расстояний от некоторой точки до концов одной стороны квадрата равна 10. Докажите, что сумма расстояний от этой точки до остальных вершин квадрата больше 4,1.

⏩ задача 52

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

§3 Теорема косинусов

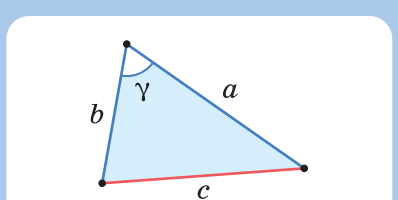


Как вы знаете, любой треугольник однозначно определяется двумя своими сторонами и углом между ними — это прямо следует из первого признака равенства треугольников. По двум сторонам и углу между ними легко построить сам треугольник на листе бумаги циркулем и линейкой. Так без формул и вычислений можно узнать его третью сторону и два других угла. Правда, построение циркулем и линейкой не всегда проведёшь на практике, ведь стороны треугольника могут быть очень велики или, наоборот, слишком малы. К тому же никакое практическое построение не может быть абсолютно точным. Поэтому важно иметь общую формулу, с помощью которой можно точно вычислить сторону треугольника по двум другим его сторонам и углу между ними. Такая формула существует, и вытекает она из важной теоремы о треугольнике, которую называют теоремой косинусов.

Теорема косинусов, так же как и теорема синусов, связывает величины углов треугольника и длины его сторон. Своё название она получила потому, что эту теорему записывают через косинусы углов треугольника. Мы докажем теорему косинусов разными способами, и первый из них будет использовать теорему Пифагора. Это естественно, поскольку теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов. А почему это так, мы скоро увидим. Но сначала давайте сформулируем саму теорему.

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Если обозначить стороны треугольника буквами a, b и c, а углы, лежащие против этих сторон, соответственно как α, β и γ, то теорему косинусов можно записать такими формулами.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Сразу бросается в глаза, что теорема косинусов похожа на теорему Пифагора. Только выглядит она сложнее, ведь в теореме Пифагора нет никаких косинусов. Поскольку теорема Пифагора верна для прямоугольных треугольников, давайте возьмём треугольник, угол γ которого равен $90°$, и запишем для него теорему косинусов. Тогда мы получим, что $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 90°$. А теперь вспомним, что $\cos 90° = 0$. Поэтому $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$. Значит, для прямоугольного треугольника теорема косинусов просто совпадает с теоремой Пифагора! Но в отличие от неё, эта теорема верна для любых треугольников: остроугольных, прямоугольных и тупоугольных. Вот почему теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора, которая в свою очередь является её частным случаем.

А теперь давайте докажем теорему косинусов.

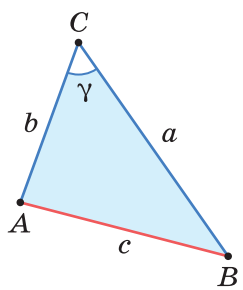


Рис. 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть стороны BC и AC треугольника ABC имеют длины a и b, а угол между ними равен γ (рис. 1). Сначала разберём случай, когда $\gamma < 90°$.

Проведём в треугольнике ABC высоту AH. Поскольку угол γ острый, то он будет совпадать с углом прямоугольного треугольника ACH, гипотенуза которого равна b (рис. 2). Выразим катеты этого треугольника через угол γ и гипотенузу: $AH = b \cdot \sin\gamma$, $CH = b \cdot \cos\gamma$.

А теперь рассмотрим прямоугольный треугольник ABH. Его катет BH равен разности отрезков CB и CH, то есть будет иметь длину либо $a - b \cdot \cos\gamma$, либо $b \cdot \cos\gamma - a$ в зависимости от того, какой из этих отрезков окажется длиннее. В общем же случае это можно записать, используя знак модуля: $BH = |a - b \cdot \cos\gamma|$.

Давайте запишем теорему Пифагора для треугольника ABH: $c^2 = AB^2 = AH^2 + BH^2 = (b \cdot \sin\gamma)^2 + (a - b \cdot \cos\gamma)^2$.

А теперь раскроем скобки и сгруппируем слагаемые:

$$c^2 = b^2 \cdot \sin^2\gamma + b^2 \cdot \cos^2\gamma + a^2 - 2ab \cdot \cos\gamma =$$
$$= b^2 \cdot (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + a^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

Так как по основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$, то мы получаем теорему косинусов $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$ для угла γ треугольника ABC.

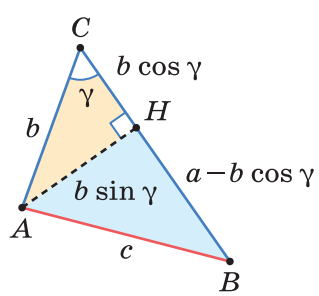


Рис. 2

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Что изменится, если $\gamma > 90°$? Высота AH треугольника ABC в этом случае упадёт на продолжение его стороны BC за точку C, и острый угол прямоугольного треугольника ACH будет равен $180° - \gamma$ (рис. 3).

Тогда его катеты AH и CH будут соответственно равны $b \cdot \sin(180° - \gamma)$ и $b \cdot \cos(180° - \gamma)$. А по формулам приведения $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$, $\cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$. Поэтому длина отрезка BH будет равна $a + b \cdot \cos(180° - \gamma) = a - b \cdot \cos\gamma$.

Если мы, как и в первом случае, запишем теорему Пифагора для треугольника ABH, то также получим, что $c^2 = (b \cdot \sin\gamma)^2 + (a - b \cdot \cos\gamma)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$.

Что и требовалось доказать.

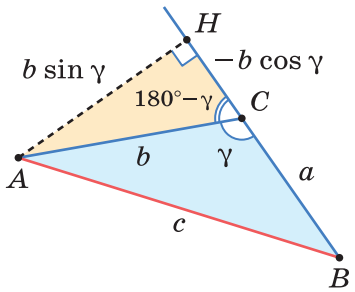


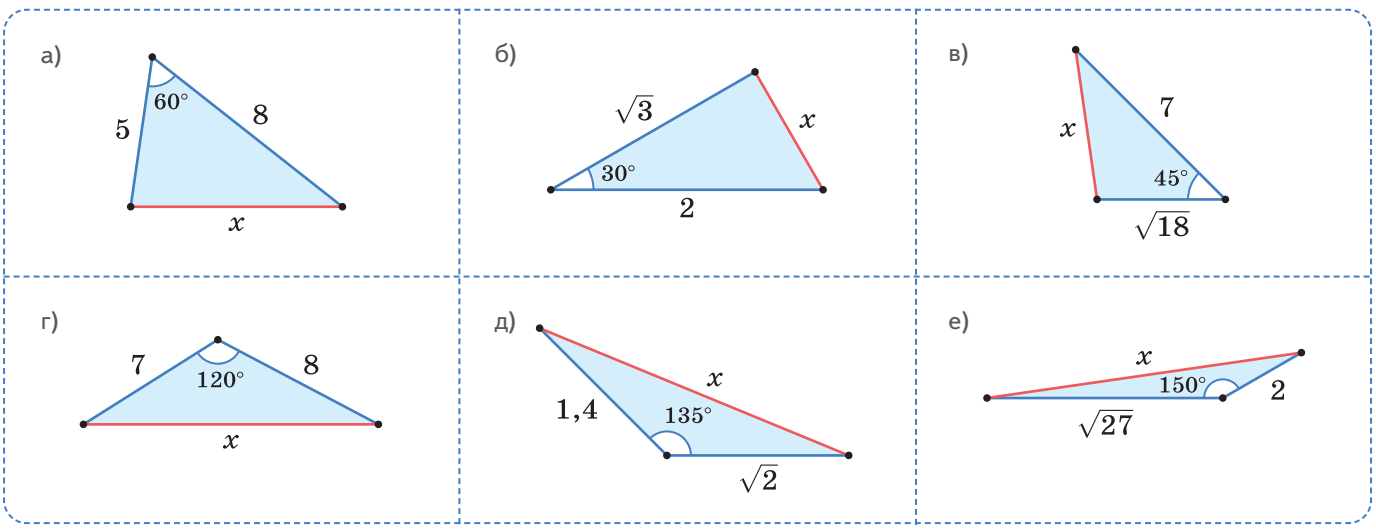
Рис. 3

Другое доказательство теоремы косинусов, которое не использует теорему Пифагора, вы можете прочитать в конце параграфа в разделе «Для тех, кто хочет знать больше».

УПРАЖНЕНИЕ

1. Найдите на каждом рисунке длину отрезка, обозначенного буквой x (рис. 4, *а*—*е*).

Рис. 4



Мы с вами только что выяснили, что теорема косинусов позволяет находить сторону треугольника по двум другим его сторонам и углу между ними. В этом смысле теорема косинусов имеет отношение к первому признаку равенства треугольников. Но её значение заключается не только в этом. Из курса геометрии 7 класса вы знаете, что треугольник является жёсткой фигурой, то есть длины

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

трёх его сторон однозначно определяют все его углы. Конечно, это следует из третьего признака равенства треугольников. Но как найти значения углов треугольника, зная длины всех его сторон? Вот для этого снова нужна теорема косинусов. Действительно, из этой теоремы следует, что косинусы углов треугольника можно точно выразить через длины всех его сторон. А если угол меньше 180°, то по значению его косинуса можно однозначно определить величину этого угла на тригонометрическом круге (рис. 5). С хорошей точностью величину нужного угла можно найти и по таблице значений косинусов. Давайте теперь выразим косинусы углов треугольника через его стороны.

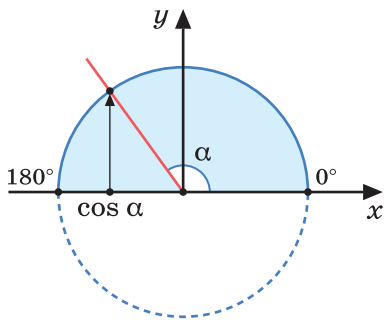
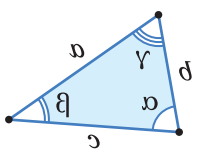


Рис. 5

ВЫРАЖЕНИЕ КОСИНУСОВ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА ЧЕРЕЗ ЕГО СТОРОНЫ

Косинусы углов треугольника однозначно определяются по длинам его сторон. Косинусы углов α, β и γ треугольника можно выразить через длины противоположных от них сторон a, b и c по формулам.



$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

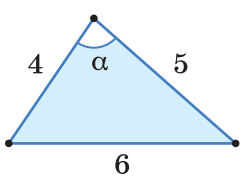
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

УПРАЖНЕНИЕ

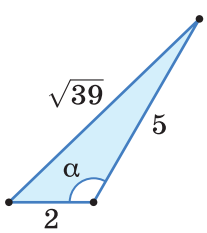
2. Найдите на каждом из рисунков значение $\cos\alpha$ и величину угла α с точностью до 1° (рис. 6, *а*–*е*).

Рис. 6

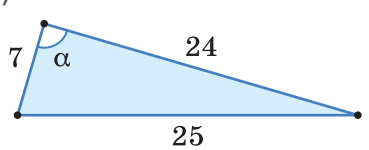
а)



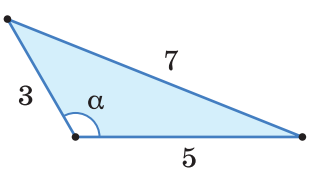
б)



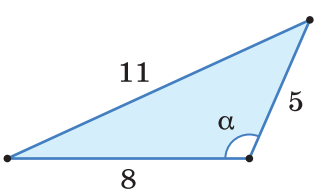
в)



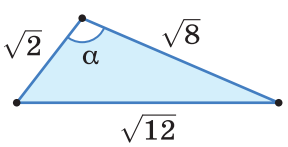
г)



д)



е)



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Значение косинуса угла треугольника позволяет сразу определить, какой это угол: острый, прямой или тупой. Ведь косинус острого угла должен быть больше нуля, для тупых углов он отрицательный, а косинус прямого угла равен нулю.

Это даёт простой способ для определения вида треугольника по длинам его сторон.

Если все углы треугольника со сторонами a, b и c острые, то и косинусы этих углов должны быть больше нуля. Но тогда $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0$, $\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} > 0$, $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} > 0$. Из этих трёх неравенств сразу следует, что $a^2 < b^2 + c^2$, $b^2 < a^2 + c^2$, $c^2 < a^2 + b^2$.

Таким образом, *квадрат любой стороны остроугольного треугольника всегда меньше суммы квадратов двух других его сторон.*

Тупой угол в треугольнике, как известно, может быть только один. И лежит он против большей его стороны. Это значит, что значение косинуса только одного из углов треугольника может быть меньше нуля. Пусть, например, в треугольнике тупой угол γ лежит против большей стороны c. Тогда $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0$.

Это значит, что $a^2 + b^2 < c^2$.

Таким образом, *в тупоугольном треугольнике квадрат большей стороны больше суммы квадратов двух других его сторон.*

Длины высот треугольника равны 3, 4 и 5.
Какой это треугольник: остроугольный, прямоугольный или тупоугольный?

УПРАЖНЕНИЕ

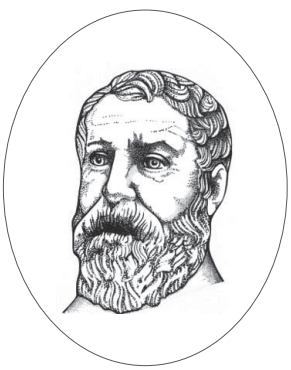
3. Определите вид треугольника, длины сторон которого равны:

а) 3, 4, 6; б) 5, 6, 7;
в) $\sqrt{7}$, 3, 4; г) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, 3.

Формула Герона

Длины трёх сторон полностью задают треугольник, как геометрическую фигуру. Это означает, что по длинам всех сторон треугольника можно определить и его площадь. Значит, должна быть соответствующая формула, выражающая площадь треугольника через его стороны. Такая формула существует и называется она формулой Герона.

Эта формула содержалась в трудах знаменитого античного инженера и геометра Герона, который работал в Александрии в I веке.



Герон сделал множество изобретений: он изобрёл масляную лампу, паровую турбину, прибор для измерения длины пути, пожарный насос, автомат для раздачи святой воды и многое другое. Правда, в начале XX века обнаружили потерянные сочинения Архимеда, и оказалось, что данная формула для площади треугольника ему была уже известна. Но формулу Герона из-за этого не стали переименовывать.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Давайте получим формулу Герона с помощью теоремы косинусов. Пусть стороны треугольника равны a, b и c. Обозначим угол, лежащий против его стороны c, буквой γ.

Тогда площадь S данного треугольника можно найти по известной формуле: $S = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2}$.

Из теоремы косинусов следует, что $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Запишем основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$.

Поэтому $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2$.

Поскольку γ — это угол треугольника, то $\gamma < 180°$, следовательно, $\sin\gamma > 0$. Значит, $\sin\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2}$.

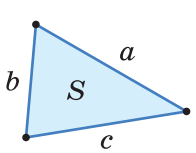
Это позволяет выразить площадь S треугольника через его стороны: $S = \frac{ab}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2}$.

После алгебраических преобразований эту формулу можно привести к виду, симметричному относительно сторон треугольника: $S = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)\cdot(-a+b+c)} =$ $= \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, где p — половина его периметра.

Давайте эту важную формулу поместим в рамку.

ФОРМУЛА ГЕРОНА

Площадь S треугольника, стороны которого равны a, b и c, можно вычислить по формуле $S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, где p — половина периметра этого треугольника.



$S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$

УПРАЖНЕНИЯ

4. Выполните алгебраические преобразования и докажите формулу Герона.

Формула Герона показывает, что площадь треугольника станет равна нулю, если одна из его сторон окажется равной половине периметра. Так будет, например, когда $p - a = 0$. В этом случае равенство

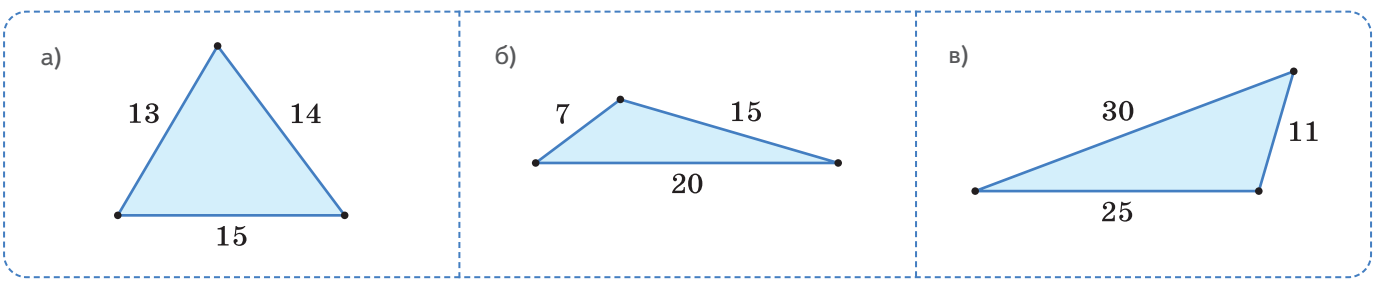
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

$p = \frac{a+b+c}{2} = a$ легко преобразовать к виду $b + c = a$.

Что оно может означать? Только одно: треугольника в этом случае уже не будет, ведь одна его сторона равна сумме двух других. Все вершины такого «вырожденного» треугольника в этом случае будут лежать на одной прямой, и сам он превратится в отрезок, площадь которого равна нулю.

5. Найдите площадь треугольников, изображённых на рисунке 7, *а*—*в*.

Рис. 7



6. Каждую сторону треугольника увеличили на 1 см. Увеличится ли его площадь?

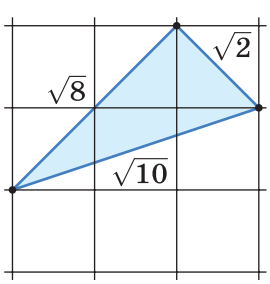


Рис. 8

☞ Пользоваться формулой Герона удобно тогда, когда стороны треугольника являются целыми или рациональными числами. В остальных же случаях применение данной формулы приводит к громоздким преобразованиям и лучше находить другие способы для вычисления площади треугольника. Например, формулу Герона не стоит применять для нахождения площади треугольника со сторонами $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ (рис. 8). Проще заметить, что $2 + 8 = 10$, откуда следует, что данный треугольник прямоугольный и его площадь равна $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}{2} = 2$.

Приведём ещё один пример: найдём площадь треугольника со сторонами 4, 5 и $\sqrt{17}$ (рис. 9). Вместо того, чтобы подставлять длины сторон этого треугольника в формулу Герона, давайте запишем для него теорему косинусов: $4^2 + 5^2 - 2\cdot4\cdot5\cdot\cos\alpha = 17$.

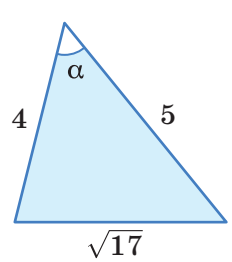


Рис. 9

Откуда сразу получим, что $\cos\alpha = 0{,}6$. По косинусу этого угла легко найти его синус, используя основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 0{,}64$. А поскольку любой угол треугольника меньше 180°, то его синус всегда больше нуля. Значит, $\sin\alpha = 0{,}8$. И теперь площадь данного треугольника легко можно найти по известной формуле: $S = \frac{4\cdot5\cdot\sin\alpha}{2} = \frac{4\cdot5\cdot0{,}8}{2} = 8$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Решение треугольников

Любой треугольник имеет шесть основных элементов: три стороны и три угла. Стороны обычно обозначают буквами a, b и c, а величины углов, лежащих против этих сторон, как α, β и γ (рис. 10).

Для того чтобы построить треугольник с помощью циркуля и линейки, достаточно знать три его элемента. Это могут быть три стороны или три угла, две стороны и один угол либо два угла и одна сторона. Правда, не всегда по трём таким элементам треугольник определяется однозначно.

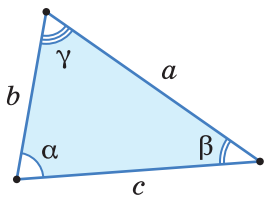
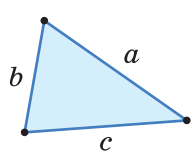
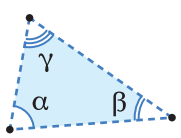
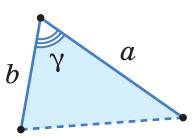
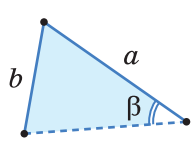
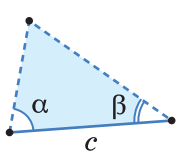
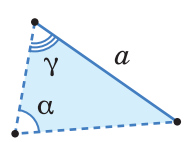


Рис. 10

УПРАЖНЕНИЯ

7. На каждом рисунке в таблице буквами отмечены три элемента треугольника (рис. 11, *а*—*е*). На каких рисунках может существовать больше одного треугольника с такими элементами?

Рис. 11

а)  a, b, c	б)  α, β, γ	в)  a, b, γ
г)  a, b, β	д)  c, α, β	е)  a, α, γ

В связи с построением треугольника по трём его элементам возникает совершенно естественный вопрос: как по трём данным элементам вычислить другие элементы треугольника? Ответ на этот вопрос дают две главные вычислительные теоремы треугольников: теорема синусов и теорема косинусов. С их помощью можно рассчитать элементы любого треугольника, да и сам метод решения таких задач часто называют решением треугольников. Давайте посмотрим, как он работает, на двух примерах.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ПРИМЕР 1. Две стороны треугольника равны 2 и 11, а угол между ними равен 120° (рис. 12). Найдите два других угла этого треугольника с точностью до 1°.

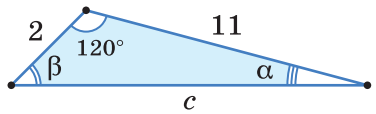


Рис. 12

РЕШЕНИЕ

Давайте введём стандартные обозначения: $a = 2$, $b = 11$, $\gamma = 120°$. Потом найдём третью сторону c этого треугольника по теореме косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos 120° = 4 + 121 - 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot (-0{,}5) = 147$. Откуда $c = 7\sqrt{3}$.

Теперь запишем для данного треугольника теорему синусов: $\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{11}{\sin\beta} = \frac{7\sqrt{3}}{\sin 120°} = 14$. Откуда получим, что $\sin\alpha = \frac{1}{7} \approx 0{,}14$ и $\sin\beta = \frac{11}{14} \approx 0{,}79$. Теперь по таблице значений синусов найдём $\alpha \approx 8°$, $\beta \approx 52°$.

Ответ: 8° и 52°.

ПРИМЕР 2. Угол треугольника равен 60°, прилежащая к нему сторона равна 8, а противоположная от него сторона равна 7 (рис. 13). Чему равна третья сторона этого треугольника?

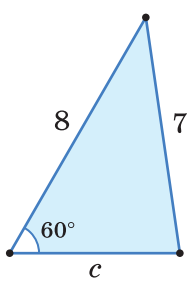


Рис. 13

РЕШЕНИЕ

Введём обозначения: $a = 7$, $b = 8$, $\alpha = 60°$. Пусть третья сторона треугольника равна c.

Запишем для угла α этого треугольника теорему косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.

Тогда $49 = 64 + c^2 - 16c \cdot \cos 60° = 64 + c^2 - 8c$. Значит, мы получаем квадратное уравнение: $c^2 - 8c + 15 = 0$. Откуда $c = 3$ либо $c = 5$.

Оба треугольника с такими сторонами существуют — они показаны на рисунке 14, *а, б*.

Ответ: 3 или 5.

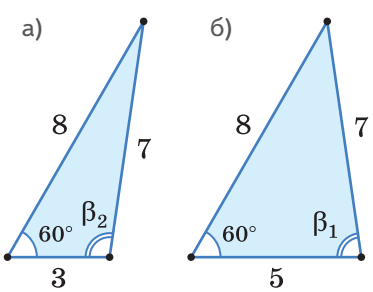


Рис. 14

Если мы запишем теорему косинусов для угла β в каждом из полученных в примере 2 треугольников, то в первом треугольнике найдём $\cos\beta_1 = -\frac{1}{7}$, а во втором $\cos\beta_2 = +\frac{1}{7}$.

Это означает, что $\beta_1 = 180° - \beta_2$. Данный результат полностью согласуется с построением такого треугольника циркулем и линейкой по данным трём элементам: двум сторонам и углу, лежащему против одной из них (рис. 15).

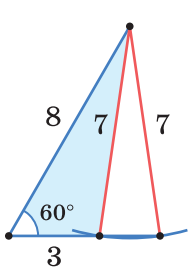


Рис. 15

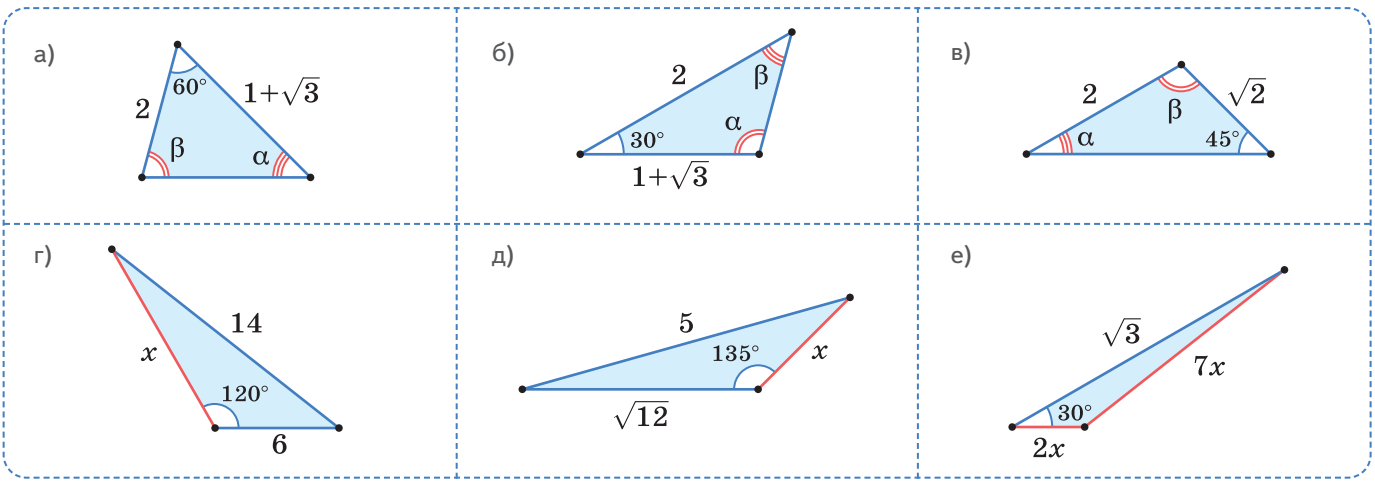
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

УПРАЖНЕНИЯ

8. Как с помощью построения и без вычислений понять, что сумма углов β_1 и β_2 из примера 2 равна 180°?

9. Найдите неизвестные углы треугольников (рис. 16, *а*, *б*, *в*) и неизвестные стороны треугольников (рис. 16, *г*, *д*, *е*).

Рис. 16



Расчёт отрезков в треугольнике

Треугольник полностью определяется длиной всех своих сторон. Это значит, что можно однозначно определить все его углы и расстояния между любыми двумя точками. А как можно вычислить расстояния между точками треугольника, зная все его стороны, мы с вами посмотрим на двух примерах.

ПРИМЕР 3. На сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно взяли точки M и K так, что $AM = 10$, $BM = 20$, $AK = 9$, $CK = 16$. Найдите длину отрезка MK, если $BC = 15$ (рис. 17).

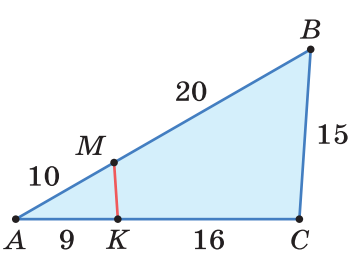


Рис. 17

РЕШЕНИЕ

Заметим, что все стороны треугольника ABC нам известны: $AB = 30$, $BC = 15$ и $AC = 25$ (рис. 18). Это значит, что мы можем найти косинусы всех его углов.

Обозначим величину угла при вершине A за α и запишем теорему косинусов для этого угла в треугольнике ABC: $15^2 = 30^2 + 25^2 - 2 \cdot 30 \cdot 25 \cdot \cos\alpha$. Откуда найдём $\cos\alpha = \frac{13}{15}$.

Заметим, что треугольники MAK и ABC имеют общий угол при вершине A, поэтому отрезок MK можно найти из тре-

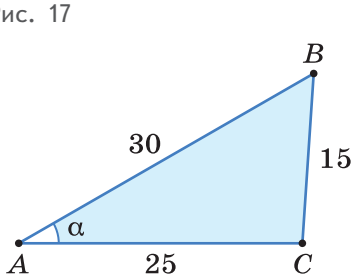


Рис. 18

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

угольника MAK по той же теореме косинусов (рис. 19):
$MK^2 = 9^2 + 10^2 - 2\cdot 9\cdot 10\cdot\cos\alpha = 181 - 2\cdot 9\cdot 10\cdot\frac{13}{15} = 25.$

Откуда $MK = 5$.

Ответ: 5.

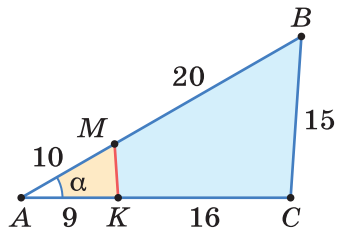


Рис. 19

ПРИМЕР 4. На стороне AC треугольника ABC взяли точку M так, что $AM = 4$, $CM = 2$. Найдите длину отрезка BM, если $AB = 2$, $BC = 5$ (рис. 20).

РЕШЕНИЕ

Решить эту задачу можно так же, как и предыдущую: найти косинус угла при вершине A в треугольнике ABC, а потом подставить его значение в теорему косинусов для треугольника ABM. Но мы рассмотрим другой способ решения таких задач — не менее универсальный.

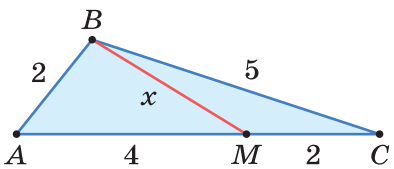


Рис. 20

Обозначим длину отрезка BM за x, а величину угла AMB за α (рис. 21). Тогда угол CMB будет равен $180^\circ - \alpha$, поскольку он смежный с углом AMB. А теперь запишем теоремы косинусов для треугольников AMB и CMB: $\begin{cases} 4^2 + x^2 - 2\cdot 4\cdot x\cdot\cos\alpha = 2^2, \\ 2^2 + x^2 - 2\cdot 2\cdot x\cdot\cos(180^\circ - \alpha) = 5^2. \end{cases}$

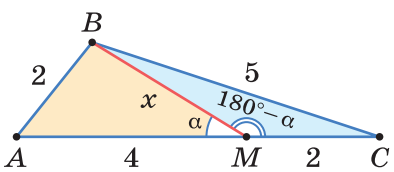


Рис. 21

Поскольку по формуле приведения мы знаем, что $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, то систему этих уравнений можно переписать так: $\begin{cases} 16 + x^2 - 8\cdot x\cdot\cos\alpha = 4, \\ 4 + x^2 + 4\cdot x\cdot\cos\alpha = 25. \end{cases}$

Давайте домножим второе из этих уравнений на 2 и сложим его с первым:

$$\begin{array}{rrcl} & 16 + & x^2 - & 8\cdot x\cdot\cos = 4 \\ + & 8 + & 2\cdot x^2 + & 8\cdot x\cdot\cos = 50 \\ \hline & 24 + & 3\cdot x^2 + & 0 = 54 \end{array}$$

Тогда мы получим, что $x^2 = 10$. Значит, $x = \sqrt{10}$.

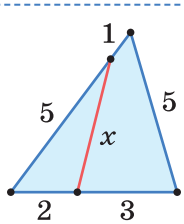
Ответ: $\sqrt{10}$.

УПРАЖНЕНИЕ

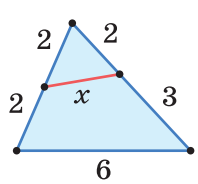
10. Найдите отрезки, отмеченные буквой x (рис. 22, *а*—*г*).

Рис. 22

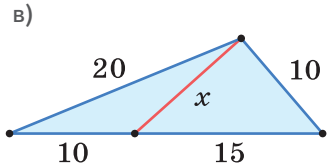
а)



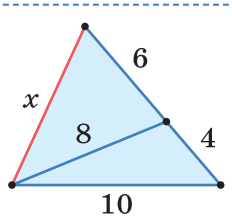
б)



в)



г)



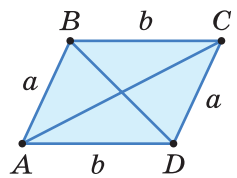
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Теорема о параллелограмме

С помощью теоремы косинусов можно доказать теорему о параллелограмме, которую легко запомнить и удобно применять для решения задач. Давайте её сформулируем.

ТЕОРЕМА О ПАРАЛЛЕЛОГРАММЕ

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон:
$AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2$.



$$AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть длины сторон параллелограмма $ABCD$ равны a и b (рис. 23). Обозначим величину угла при его вершине A за α и запишем теорему косинусов для этого угла в треугольнике ABD:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha. \quad (1)$$

А теперь рассмотрим треугольник ABC. Его угол при его вершине B равен $180^\circ - \alpha$, поскольку противоположные стороны параллелограмма параллельны (рис. 24). Запишем теорему косинусов для этого угла в треугольнике ABC: $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$. По формуле приведения мы знаем, что $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$. Поэтому:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha. \quad (2)$$

Давайте теперь сложим уравнения (1) и (2). Тогда мы получим:

$$AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Значит, сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Что и требовалось доказать.

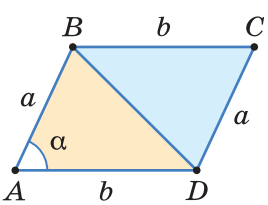


Рис. 23

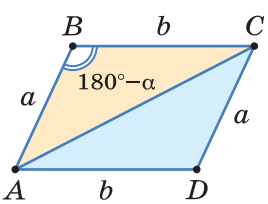


Рис. 24

УПРАЖНЕНИЯ

11. Стороны параллелограмма равны $\sqrt{8}$ и $\sqrt{10}$. Найдите его диагонали, если их длины относятся как 3 : 4.

12. Докажите, что сумма квадратов двух средних линий четырёхугольника в два раза меньше суммы квадратов его диагоналей.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Формула медианы треугольника

Одним из самых распространённых применений теоремы о параллелограмме является метод вычисления длины медианы треугольника по длинам его сторон. Давайте посмотрим, как это можно сделать.

Пусть стороны BC и AC треугольника ABC равны a и b (рис. 25). Как найти длину его медианы CM, проведённой к стороне c? Давайте обозначим длину этой медианы буквой m и сделаем известное дополнительное построение: продлим эту медиану на свою длину. Тогда на продолжении отрезка CM мы получим точку D, для которой $DM = CM$ (рис. 26).

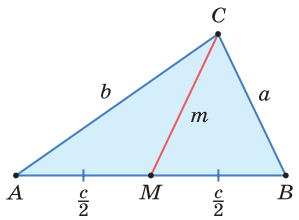


Рис. 25

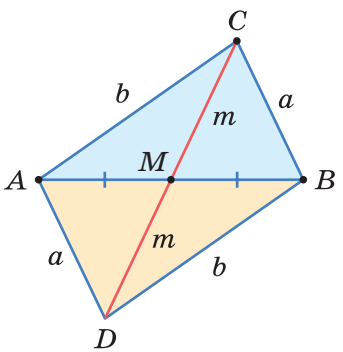


Рис. 26

Четырёхугольник $ACBD$ будет параллелограммом по признаку, поскольку его диагонали делятся точкой M пополам. Стороны же полученного параллелограмма будут равны a и b. Запишем для него теорему о параллелограмме: $AB^2 + CD^2 = 2a^2 + 2b^2$.

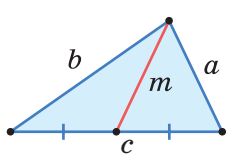
А теперь заметим, что $AB = c$, $CD = 2m$. Тогда мы получим $c^2 + (2m)^2 = 2a^2 + 2b^2$.

Откуда $m^2 = \dfrac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$.

Поэтому медиану треугольника можно вычислять по следующей формуле.

ФОРМУЛА МЕДИАНЫ

Если стороны треугольника равны a, b и c, то его медиана m, проведённая к стороне c, равна $m = \dfrac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$.



УПРАЖНЕНИЯ

13. Основание равнобедренного треугольника равно 2. Найдите его боковую сторону, если медиана, проведённая к этой стороне, равна 3.

14. Две стороны треугольника равны 3 и 4. Найдите его третью сторону, если она равна медиане, проведённой к этой стороне.

15. Центр O окружности лежит в середине отрезка AB (рис. 27). Верно ли, что для произвольной точки M на этой окружности сумма $AM^2 + BM^2$ постоянна?

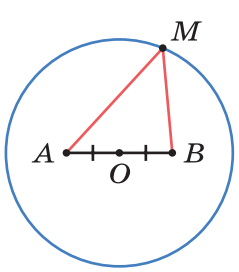


Рис. 27

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ВОПРОСЫ

1. Как формулируется теорема косинусов?
2. Является ли теорема Пифагора частным случаем теоремы косинусов?
3. Какому условию должны удовлетворять стороны треугольника, чтобы он имел тупой угол?
4. Как найти величины углов треугольника, зная длины всех его сторон?
5. В чём заключаются методы решения треугольников?
6. Как выражается площадь треугольника через длины всех его сторон?
7. В чём состоит теорема о параллелограмме?
8. Как из теоремы о параллелограмме получить формулу медианы треугольника?
9. В каком случае две стороны и один угол треугольника не определяют его однозначно?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 5. ★☆☆ Высота треугольника равна 1. Найдите угол треугольника, из которого проведена эта высота, если она делит противоположную сторону треугольника на отрезки с длинами 2 и 3 (рис. 28).

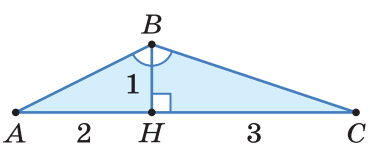


Рис. 28

РЕШЕНИЕ

Пусть данная высота BH делит сторону AC треугольника ABC на отрезки AH и HC с длинами 2 и 3. По теореме Пифагора из треугольников ABH и CBH найдём, что $AB^2 = 5$, $BC^2 = 10$. Значит, $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{10}$.

Обозначим теперь величину угла ABC за β и запишем теорему косинусов для треугольника ABC: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\beta$. Подставим в это равенство полученные нами значения для сторон AB и BC. Тогда $5^2 = 5 + 10 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\beta$.

Откуда найдём, что $\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $\beta = 135°$.

Ответ: 135°.

ПРИМЕР 6. ★☆☆ Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 1, 2 и $\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$. Выражается ли она рациональным числом?

РЕШЕНИЕ

Применение формулы Герона для треугольника с такими сторонами приведёт к очень громоздким вычислениям. Давайте поступим по-другому. Обозначим за α угол между сторонами треугольника, длины которых равны 1 и 2 (рис. 29).

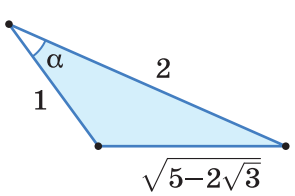


Рис. 29

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

А теперь запишем теорему косинусов для этого угла треугольника: $1^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cos\alpha = \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}\right)^2$. Откуда найдём, что $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит, угол α равен 30°. Площадь треугольника теперь можно найти через синус этого угла: $S = \frac{1 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 0{,}5$. Поэтому площадь треугольника — число рациональное.

Ответ: 0,5.

ПРИМЕР 7. ★☆☆ Точка касания вписанной в треугольник окружности делит его сторону на отрезки с длинами 5 и 21. Найдите периметр этого треугольника, если в нём против этой стороны лежит угол 60° (рис. 30).

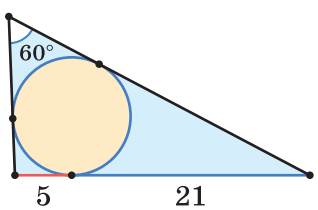


Рис. 30

РЕШЕНИЕ

Пусть угол при вершине B треугольника ABC равен 60°, а вписанная в этот треугольник окружность касается его стороны AC в точке K. Будем считать, что $AK = 5$, $CK = 21$. Обозначим точки касания данной окружности со сторонами AB и BC треугольника как E и F (рис. 31). Тогда по свойству отрезков касательных $AE = AK = 5$, $CF = CK = 21$.

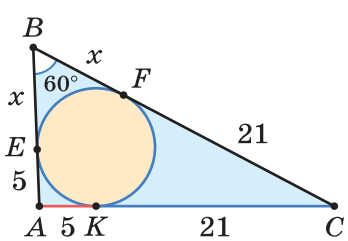


Рис. 31

По тому же свойству $BE = BF$. Обозначим длины этих отрезков за x. Тогда $AB = 5 + x$, $BC = 21 + x$.

Запишем теперь теорему косинусов для треугольника ABC: $(x + 5)^2 + (x + 21)^2 - 2 \cdot (x + 5) \cdot (x + 21) \cdot \cos 60^\circ = 26^2$.

Если мы раскроем скобки, то получим уравнение $x^2 + 26x - 315 = 0$. Это уравнение имеет только один положительный корень $x = 9$. Поэтому периметр треугольника равен $2x + 52 = 18 + 52 = 70$.

Ответ: 70.

ПРИМЕР 8. ★★☆ Стороны вписанного в окружность четырёхугольника последовательно равны 3, 5, 5 и 8 (рис. 32). Найдите длины его диагоналей.

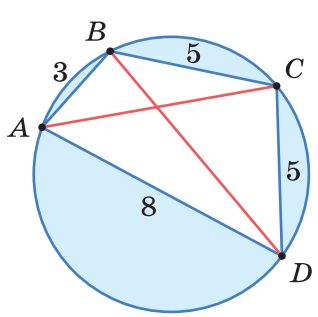


Рис. 32

РЕШЕНИЕ

Пусть четырёхугольник $ABCD$ имеет следующие длины сторон: $AB = 3$, $AD = 8$, $BC = CD = 5$.

Обозначим длину его диагонали BD за x, а величину угла BAD за α. Поскольку данный четырёхугольник вписан в окружность, сумма его противоположных

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

углов должна быть равна 180°. Значит, угол BCD равен $180° - \alpha$ (рис. 33).

Запишем теоремы косинусов для треугольников ABD и BCD: $\begin{cases} x^2 = 3^2 + 8^2 - 2\cdot3\cdot8\cos\alpha, \\ x^2 = 5^2 + 5^2 - 2\cdot5\cdot5\cos(180° - \alpha). \end{cases}$

По формуле приведения $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. Поэтому систему уравнений можно записать так: $\begin{cases} x^2 = 73 - 48\cos\alpha, \\ x^2 = 50 + 50\cos\alpha. \end{cases}$

Откуда $x = \frac{55}{7}$.

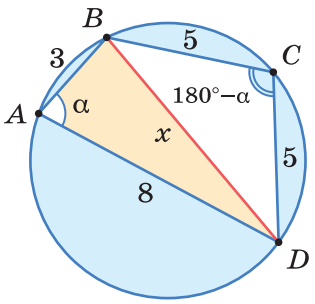


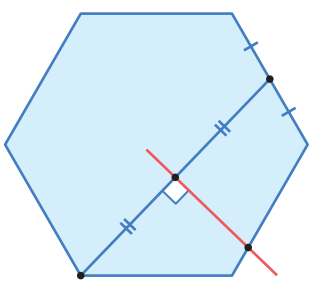
Рис. 33

Аналогично можно записать теоремы косинусов для треугольников ABC и ADC и найти, что диагональ AC равна 7.

Ответ: 7 и $\frac{55}{7}$.

☞ Вторую диагональ четырёхугольника проще найти с помощью теоремы Птолемея. По этой теореме $AC \cdot BD = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 8 = 55$.

ПРИМЕР 9. ★★☆ Все стороны и все углы шестиугольника равны. Отрезок соединяет середину одной стороны с концом противоположной стороны. В каком отношении серединный перпендикуляр к этому отрезку делит другую сторону шестиугольника (рис. 34)?


Рис. 34

РЕШЕНИЕ

Пусть точка M — середина стороны DE правильного шестиугольника $ABCDEF$. Серединный перпендикуляр к отрезку AM пересекает сторону FE в точке K, одинаково удалённой от его концов. Поэтому $AK = MK$. Обозначим длину этих отрезков одной буквой a (рис. 35).

Примем длину стороны шестиугольника за 1, а длину отрезка FK обозначим за x. Тогда $ME = \frac{1}{2}$, $EK = 1 - x$. Сумма углов любого шестиугольника равна $180°\cdot(6 - 2) = 720°$. Поскольку все они равны, то каждый его угол равен $720° : 6 = 120°$.

А теперь запишем теорему косинусов для треугольников AFK и MEK: $\begin{cases} 1 + x^2 - 2x\cdot\cos120° = a^2, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1 - x)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(1 - x)\cdot\cos120° = a^2. \end{cases}$

Вспомним, что $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, и приравняем эти выражения для a^2. Тогда мы получим такое уравнение:

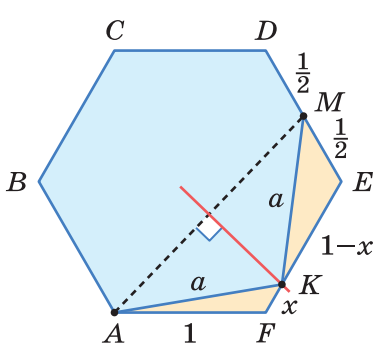


Рис. 35

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

$1 + x^2 + x = 0{,}25 + (1 - x)^2 + 0{,}5\cdot(1 - x)$. Откуда $x = \frac{3}{14}$. Значит, $EK = 1 - x = \frac{11}{14}$. Поэтому $FK : EK = 3 : 11$.

Ответ: 3 : 11.

ПРИМЕР 10. ★★★ Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, также касающейся всех данных окружностей внешним способом (рис. 36).

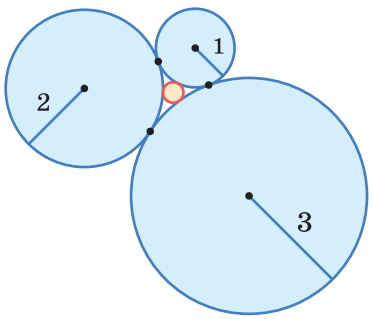


Рис. 36

РЕШЕНИЕ

Обозначим центры окружностей с радиусами 1, 2 и 3 соответственно O_1, O_2 и O_3 (рис. 37). Так как эти окружности касаются друг друга внешним образом, то расстояния между их центрами соответственно равны сумме радиусов этих окружностей. Значит, $O_1O_2 = 3$, $O_1O_3 = 4$ и $O_2O_3 = 5$. А поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$, то треугольник $O_1O_2O_3$ будет иметь прямой угол при вершине O_1.

Обозначим центр искомой окружности буквой O, а её радиус как r. Поскольку эта окружность внешним образом касается остальных, то $OO_1 = r + 1$, $OO_2 = r + 2$, $OO_3 = r + 3$. Пусть угол OO_1O_2 равен α (рис. 38).

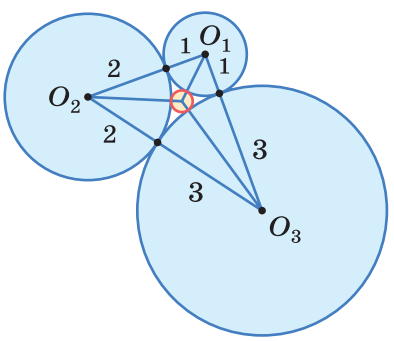


Рис. 37

Угол OO_1O_3 будет равен $90^\circ - \alpha$, так как треугольник $O_1O_2O_3$ прямоугольный. Давайте теперь запишем теоремы косинусов для треугольников OO_1O_2 и OO_1O_3: $\begin{cases}(r + 2)^2 = (r + 1)^2 + 3^2 - 2\cdot3\cdot(r + 1)\cdot\cos\alpha,\\ (r + 3)^2 = (r + 1)^2 + 4^2 - 2\cdot4\cdot(r + 1)\cdot\cos\cdot(90^\circ - \alpha).\end{cases}$

Вспомним, что по формуле приведения $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, и выразим из этих уравнений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через радиус r: $\cos\alpha = \frac{3 - r}{3\cdot(r + 1)}$, $\sin\alpha = \frac{2 - r}{2\cdot(r + 1)}$.

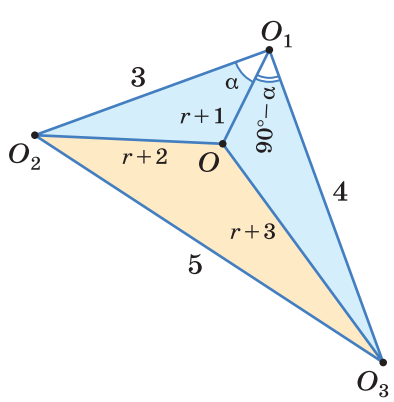


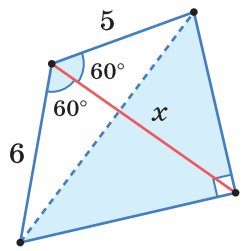
Рис. 38

Нам осталось исключить из системы двух этих уравнений угол α. Сделать это проще всего, используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Итак, возведём каждое из уравнений системы в квадрат и потом сложим их.

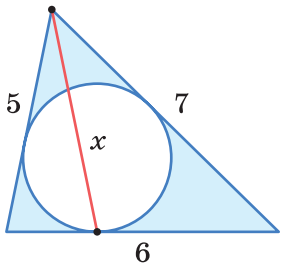
Тогда мы получим уравнение с одной неизвестной r: $\left(\frac{2 - r}{2\cdot(r + 1)}\right)^2 + \left(\frac{3 - r}{3\cdot(r + 1)}\right)^2 = 1$. После упрощения приведём его к виду $23r^2 + 132\,r - 36 = 0$. Это квадратное уравнение имеет корни $r_1 = -6$ и $r_2 = \frac{6}{23}$. Ясно, что радиусом искомой окружности может быть только положительный корень. Значит, $r = \frac{6}{23}$.

Ответ: $\frac{6}{23}$.

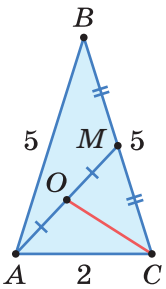
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 11



задача 13



задача 19

ЗАДАЧИ

1. ★☆☆ Длины сторон треугольника равны a, b и c. Найдите угол γ этого треугольника, лежащий против стороны c, если выполняется соотношение $c^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab$.

2. ★☆☆ Длины сторон треугольника равны a, b и c. Найдите угол γ этого треугольника, лежащий против стороны c, если выполняется соотношение $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \sin\gamma$.

3. ★☆☆ Стороны треугольника равны $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$ и 3. Найдите меньший угол и площадь этого треугольника.

4. ★☆☆ Стороны треугольника равны 2, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{13}$. Найдите больший угол и площадь этого треугольника.

5. ★☆☆ Высота треугольника равна 2. Найдите угол треугольника, из которого проведена эта высота, если она делит его сторону на отрезки с длинами 3 и 10.

6. ★☆☆ Высота треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите угол треугольника, из которого проведена эта высота, если она делит его сторону на отрезки с длинами 2 и 5.

7. ★☆☆ Сторона треугольника равна 10, а прилежащий к ней угол равен 60°. Найдите две другие стороны этого треугольника, если его периметр равен 40.

8. ★☆☆ Один угол треугольника равен 120°, а сторона, выходящая из вершины этого угла, в три раза меньше суммы двух других его сторон. Найдите отношение сторон треугольника.

9. ★☆☆ Стороны треугольника равны 2, 3 и 4. В каком отношении серединный перпендикуляр к его большей стороне делит другую сторону треугольника?

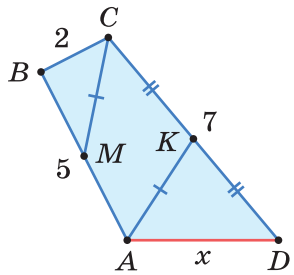
10. ★☆☆ Три отрезка с длинами 2, 5 и 6 имеют один конец и образуют друг с другом углы 120°. Найдите наибольший угол треугольника с вершинами в других концах этих отрезков.

11. ★☆☆ Катеты прямоугольного треугольника видны из некоторой точки под углами 60°. Расстояния от этой точки до концов гипотенузы треугольника равны 5 и 6. Найдите расстояние x от данной точки до третьей вершины треугольника. (▸▸ рис.)

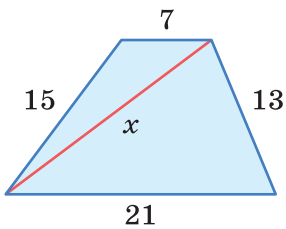
12. ★☆☆ Точка касания вписанной в треугольник окружности делит его сторону на отрезки с длинами 5 и 7. Найдите периметр данного треугольника, если косинус его угла, противоположного этой стороне, равен 0,125.

13. ★☆☆ В треугольник со сторонами 5, 6 и 7 вписана окружность. Найдите расстояние x от точки её касания со стороной длины 6 до противоположной вершины треугольника. (▸▸ рис.)

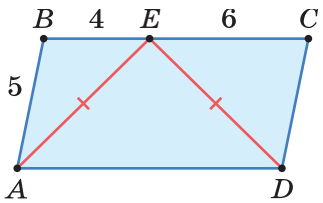
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 20



задача 22



задача 23

14. ★☆☆ В равнобедренный треугольник со сторонами 8, 8 и 11 вписана окружность. Найдите расстояние от точки её касания с боковой стороной треугольника до противоположной вершины.

15. ★★☆ Докажите, что в любом треугольнике с углами α, β, γ верно равенство:
$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma$.

16. ★★☆ Для углов α, β, γ треугольника выполняется равенство:
$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$.
Найдите угол γ.

17. ★★☆ Две стороны треугольника равны 3 и 5, а угол между ними равен 60°. Найдите медиану треугольника, проведённую к его третьей стороне.

18. ★★☆ Две стороны треугольника равны 2 и 4, а его медиана, проведённая к третьей стороне, равна $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$. Найдите площадь этого треугольника.

19. ★★☆ Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 2, а его боковые стороны равны 5. Точка O — середина медианы AM треугольника. Найдите OC. (▸▸ рис.)

20. ★★☆ В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки M и K — середины сторон AB и CD соответственно. Известно, что $AB = 5$, $BC = 2$, $CD = 7$. Найдите AD, если $AK = CM$. (▸▸ рис.)

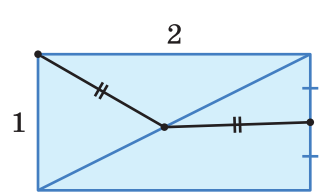
21. ★★☆ Медиана равнобедренного треугольника, проведённая к боковой стороне, равна его основанию. Найдите косинус угла между боковыми сторонами этого треугольника.

22. ★★☆ Основания трапеции равны 7 и 21, а её боковые стороны равны 13 и 15. Найдите диагональ трапеции, обозначенную буквой x на рисунке. (▸▸ рис.)

23. ★★☆ Точка E делит сторону BC параллелограмма $ABCD$ на отрезки с длинами 4 и 6, при этом $AE = ED$. Найдите отрезок AE, если $AB = 5$. (▸▸ рис.)

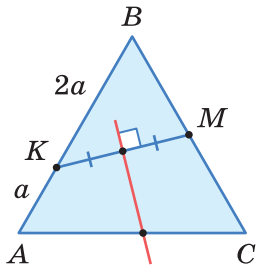
24. ★★☆ В треугольнике ABC стороны AB и BC равны 12 и 15, а угол между ними равен 60°. На этих сторонах соответственно взяли точки M и K так, что $AM = MK = KC$. Найдите отрезок MK.

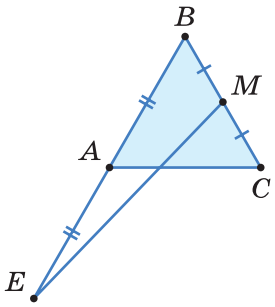
25. ★★☆ На диагонали прямоугольника взяли точку, равноудаленную от одной его вершины и середины меньшей стороны. В каком отношении данная точка делит диагональ, если стороны прямоугольника равны 1 и 2? (▸▸ рис.)

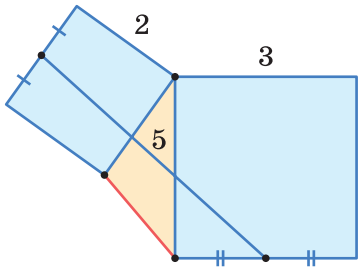


задача 25

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021







задача 26

задача 27

задача 28

26. ★★☆ Точка M — середина стороны BC равностороннего треугольника ABC, точка K делит сторону AB в отношении $AK : KB = 1 : 2$. В каком отношении делит сторону AC серединный перпендикуляр к отрезку MK? (▸▸ рис.)

27. ★★☆ Точка M — середина стороны BC равностороннего треугольника ABC, точка E лежит на продолжении стороны AB, причём $AE = AB$. Серединный перпендикуляр к отрезку ME пересекает прямую AC в точке K. Выясните, где находится точка K: на стороне AC или на её продолжении. Найдите $AK : CK$. (▸▸ рис.)

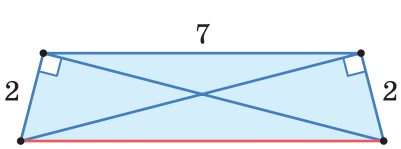
28. ★★☆ Два квадрата имеют общую вершину. Их стороны равны 2 и 3, а расстояние между серединами показанных на рисунке сторон равно 5. Найдите площадь треугольника, образованного двумя сторонами этих квадратов, выходящими из их общей вершины. (▸▸ рис.)

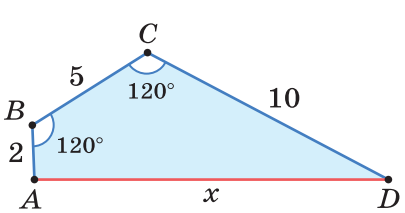
29. ★★☆ Одна сторона четырёхугольника видна из двух других его вершин под прямыми углами. Найдите эту сторону, если противоположная от неё сторона равна 7, а две другие равны 2. (▸▸ рис.)

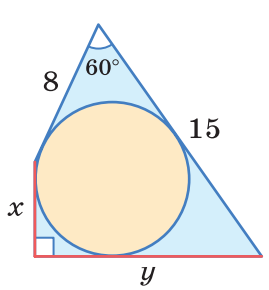
30. ★★☆ В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и C равны 120°, $AB = 2$, $BC = 5$, $CD = 10$. Найдите AD. (▸▸ рис.)

31. ★★☆ Около окружности описан четырёхугольник, один угол которого прямой. Противоположный ему угол равен 60°, а прилежащие к нему стороны равны 8 и 15. Найдите две другие стороны этого четырёхугольника. (▸▸ рис.)

32. ★★☆ Шесть равносторонних треугольников расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что сумма площадей четырёх голубых треугольников равна сумме площадей двух жёлтых. (▸▸ рис.)





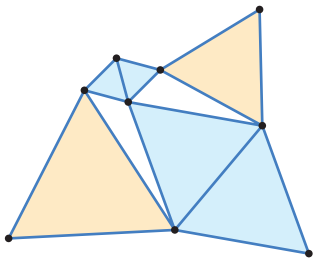


задача 29

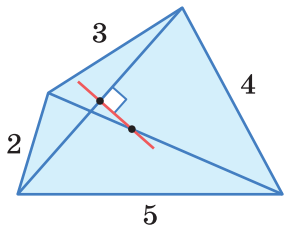
задача 30

задача 31

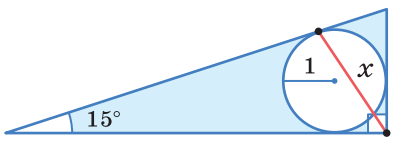
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 32



задача 33



задача 35

33. ★★★ Стороны четырёхугольника, взятые по порядку, равны 2, 3, 4 и 5. В каком отношении серединный перпендикуляр к отмеченной на рисунке диагонали делит его другую диагональ? (▸▸ рис.)

34. ★★★ Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны a и b, а угол между диагоналями равен α.

35. ★★★ Окружность радиуса 1 вписана в прямоугольный треугольник с углом 15°. Найдите расстояние от точки её касания с гипотенузой до вершины прямого угла. (▸▸ рис.)

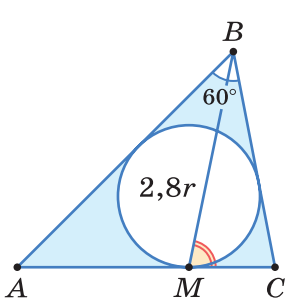
36. ★★★ Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его стороны AC в точке M. Оказалось, что отрезок BM в 2,8 раза больше её радиуса. Найдите синус угла BMC, если угол ABC равен 60°. (▸▸ рис.)

37. ★★★ Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, а радиус вписанной в него окружности — r. Найдите расстояние x от вершины прямого угла треугольника до точки касания вписанной окружности с гипотенузой. (▸▸ рис.)

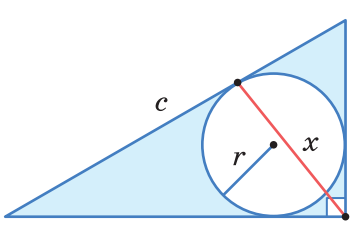
38. ★★★ Докажите, что разность между суммой квадратов всех сторон четырёхугольника и суммой квадратов его диагоналей в 4 раза больше квадрата расстояния между серединами его диагоналей.

39. ★★★ На сторонах угла в 60° расположены отрезки AB и CD, причём отрезки AC и BD не пересекаются. Найдите расстояние между серединами отрезков AC и BD, если $AB = 7$, $CD = 8$.

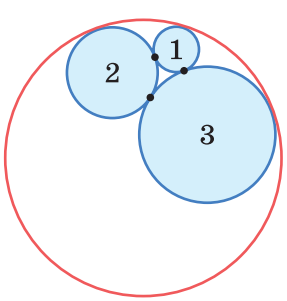
40. ★★★ Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются между собой внешним образом. Найдите радиус окружности, касающейся трёх данных внутренним способом. (▸▸ рис.)



задача 36

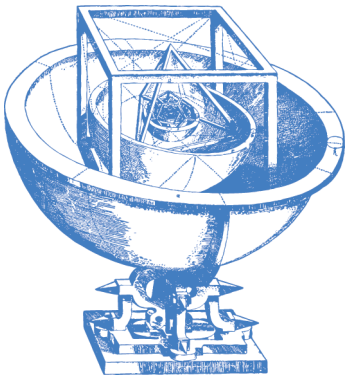


задача 37



задача 40

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Другие доказательства теоремы косинусов

Теорему косинусов можно доказать с помощью только одной тригонометрии, даже не используя теоремы Пифагора. Давайте посмотрим, как это можно сделать. Но сначала докажем полезную лемму.

ЛЕММА

В любом треугольнике, против сторон a, b и c которого лежат углы α, β и γ, выполняются следующие соотношения:

$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$$
$$b = c \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\gamma$$
$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$$

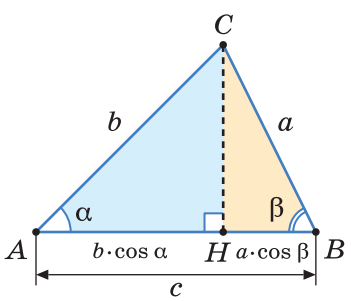
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ

Пусть величины углов при вершинах A и B треугольника ABC равны α и β. Опустим на его сторону AB высоту CH (рис. 39).

Если углы α и β острые, точка H будет находиться на отрезке AB. Тогда $AB = AH + BH$.

Длины отрезков AH и BH найдём из прямоугольных треугольников ACH и BCH: $AH = AC \cdot \cos\alpha = b \cdot \cos\alpha$, $BH = BC \cdot \cos\beta = a \cdot \cos\beta$.

Поэтому в этом случае $AB = c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$.



Случай, когда углы α и β острые: $c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$

Рис. 39

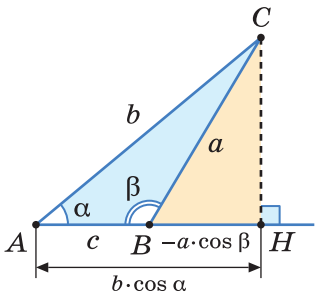
Теперь рассмотрим случай, когда $\beta > 90°$ (рис. 40). Высота CH упадёт тогда на продолжение стороны AB треугольника за точку B, поэтому $c = AB = AH - BH$. Поскольку теперь угол CBH будет равен $180° - \beta$, то

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

$BH = BC \cdot \cos(180° - \beta) = a \cdot \cos(180° - \beta) = -a \cdot \cos\beta$. Поэтому $AB = c = b \cdot \cos\alpha - (-a \cdot \cos\beta) = b \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\beta$. Значит, и в этом случае мы получим то же самое выражение.

Аналогично можно разобрать случай, когда $\alpha > 90°$, и доказать соответствующие равенства для других сторон треугольника.

Что и требовалось доказать.



Случай, когда $\beta > 90°$:
$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$

Рис. 40

Перейдём теперь к тригонометрическому доказательству теоремы косинусов.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим три равенства для треугольника, которые мы с вами только что доказали в лемме:

$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha \quad (1)$$
$$b = c \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\gamma \quad (2)$$
$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta \quad (3)$$

Умножим первое из них на c, второе на b и третье на a. Тогда мы получим, что:

$$c^2 = ac \cdot \cos\beta + bc \cdot \cos\alpha \quad (4)$$
$$b^2 = bc \cdot \cos\alpha + ab \cdot \cos\gamma \quad (5)$$
$$a^2 = ab \cdot \cos\gamma + ac \cdot \cos\beta \quad (6)$$

Если теперь из уравнения (4) вычесть (5) и (6), то мы получим: $c^2 - a^2 - b^2 = ac \cdot \cos\beta + bc \cdot \cos\alpha - bc \cdot \cos\alpha - 2ab \cdot \cos\gamma - ac \cdot \cos\beta = -2ab \cdot \cos\gamma$. Откуда сразу и следует теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$.

Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЕ

16. Кроме тригонометрического доказательства теоремы косинусов, существует и чисто геометрическое. Его дал в XVI веке голландский математик из ордена иезуитов Григорий Сан-Винценто. Он сформулировал и доказал теорему косинусов на языке площадей. Его доказательство является прямым обобщением доказательства теоремы Пифагора, которое было дано Евклидом в его «Началах». На рисунке 41 вы можете видеть чертёж к доказательству Григория Сан-Винценто с тремя квадратами, построенными на сторонах треугольника. Попробуйте по этому чертежу восстановить само доказательство.

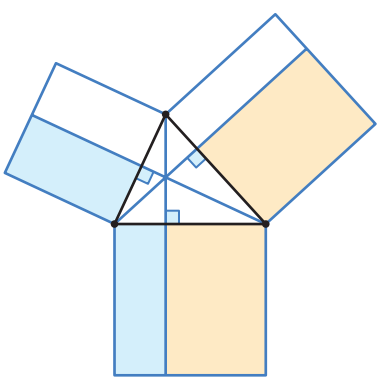


Рис. 41
Доказательство теоремы косинусов Григория Сан-Винценто

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Теорема косинусов помогает алгебре

Все мы давно привыкли к тому, что алгебра помогает геометрии. При решении геометрических задач на вычисление очень часто нужно упрощать выражения с неизвестными величинами или решать уравнения. Даже тригонометрия в наши дни не только решает треугольники — в школе её в основном изучают на уроках алгебры: там запоминают тригонометрические формулы, разбирают уравнения с синусами и косинусами и рисуют графики этих функций. Тем не менее, существуют алгебраические задачи, которые гораздо легче решить с помощью доброй классической геометрии. Мы разберём с вами две такие задачи и посмотрим, как в их решениях работает теорема косинусов.

ПРИМЕР 11. ★★★ Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$.

РЕШЕНИЕ

Решить такую задачу методами чистой алгебры совсем не просто. Мы же пойдём другим путём. Рассмотрим сначала случай, когда $x > 0$. Тогда можно считать, что x — это длина некоторого отрезка. Попробуем сделать геометрическую интерпретацию для каждого квадратного корня, которые составляют данное выражение. И здесь нам очень поможет теорема косинусов.

Давайте рассмотрим треугольник AOB, у которого стороны AO и BO равны 1 и x, а угол между этими сторонами равен $60°$ (рис. 42). Запишем теорему косинусов для этого треугольника: $AB^2 = x^2 + 1 - 2x \cdot \cos 60° = x^2 + 1 - x$.

Откуда получим, что $AB = \sqrt{x^2 - x + 1}$. Так в виде отрезка мы представим первый квадратный корень данного нам выражения.

Попробуем таким же образом геометрически представить второй корень. Для этого возьмём треугольник COB, длины двух сторон которого равны 1 и x, а угол между ними равен $30°$ (рис. 43).

Тогда по теореме косинусов для этого треугольника можно получить, что $BC^2 = x^2 + 1 - 2x \cdot \cos 30° = x^2 + 1 - \sqrt{3} \cdot x$.

Таким образом, $BC = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$.

Итак, каждое из слагаемых, входящих в данное нам выражение, мы представили в виде длины некоторого отрезка.

Для того чтобы представить сумму $AB + BC$ этих отрезков, давайте совместим вершины O и B треугольников AOB и COB (рис. 44). Тогда сразу станет видно, что

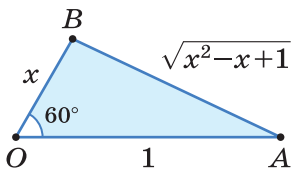


Рис. 42

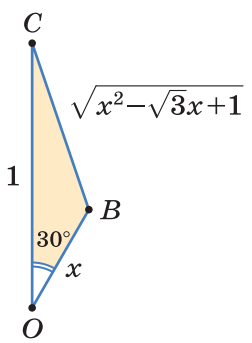


Рис. 43

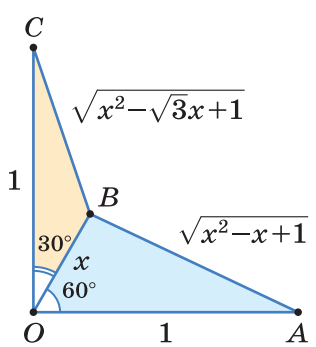


Рис. 44

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

положение точек A, O и C не зависит от длины x отрезка OB. При изменении величины x точка B будет перемещаться по лучу, который образует с отрезками OA и OB соответственно углы 60° и 30°. Сумма же $AB + BC$ будет длиной ломаной, соединяющей точки A и C (рис. 45).

По неравенству треугольника $AB + BC \geqslant AC$. А поскольку угол AOC равен $60° + 30° = 90°$, то длину отрезка AC легко вычислить из треугольника AOC по теореме Пифагора: $AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Откуда $AC = \sqrt{2}$. Значит, $AB + BC \geqslant \sqrt{2}$, причём минимальное значение данной суммы будет достигаться, когда точка B окажется на отрезке AC. Итак, мы геометрически доказали для положительных x

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \geq \sqrt{2}.$$

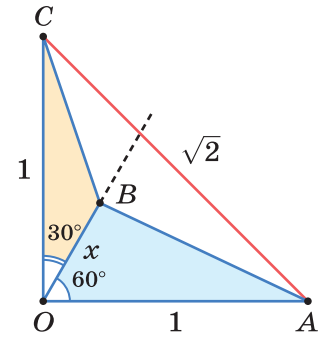


Рис. 45

А как с помощью геометрии разобрать случай, если $x < 0$? Оказывается, сделать это тоже можно. Конечно, длина x отрезка не бывает отрицательной, поэтому давайте будем считать тогда величину $(-x)$ длиной некоторого отрезка, поскольку $(-x) > 0$. Если теперь положить углы AOB и BOC соответственно равными 120° и 150°, то мы снова получим $AB = \sqrt{x^2 - x + 1}$ и $BC = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$.

Чертёж для этого случая будет таким: точка B просто окажется на продолжении луча с вершиной O, на котором она находилась в случае $x > 0$ (рис. 46). При таком положении точки B сумма $AB + BC$ тоже будет больше длины отрезка AC. Итак, для всех случаев мы доказали, что наименьшее значение выражения равно $\sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

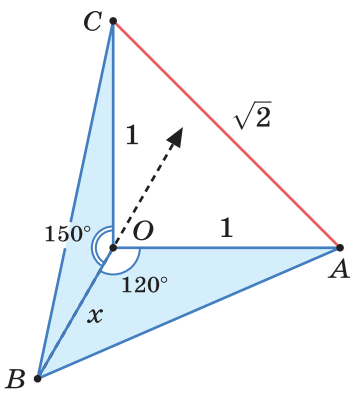


Рис. 46

☞ Показанный геометрический метод позволяет не только найти наименьшее значение выражения, но и выяснить, при каком x оно достигается. Попробуйте это сделать!

ПРИМЕР 12. ★★★ Положительные числа x, y, z таковы, что $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 25, \\ y^2 + z^2 + yz = 49, \\ z^2 + x^2 + zx = 64. \end{cases}$ Найдите сумму $xy + yz + zx$.

РЕШЕНИЕ

Поскольку числа x, y, z положительны, каждое из них можно считать длиной некоторого отрезка. Проведём из произвольной точки O отрезки OA, OB и OC соответственно с длинами x, y и z так, чтобы они образовывали между собой углы 120° (рис. 47).

А теперь запишем теорему косинусов для трёх треугольников AOB, BOC и AOC:

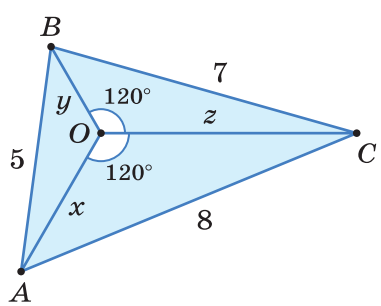


Рис. 47

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = AB^2, \\ y^2 + z^2 + yz = BC^2, \\ z^2 + x^2 + zx = AC^2. \end{cases}$$

Если три этих равенства сравнить с уравнениями, которые даны в условии задачи, то мы сразу получим, что $AB = 5$, $BC = 7$ и $AC = 8$. Таким образом, нам известны все стороны треугольника ABC. Значит, можно найти его площадь S. Для этого сначала найдём половину периметра треугольника $p = 10$ и воспользуемся формулой Герона: $S = \sqrt{10 \cdot (10-5) \cdot (10-7) \cdot (10-8)} = 10\sqrt{3}$.

Какое отношение всё это имеет к сумме $xy + yz + zx$? Оказывается, что самое прямое. Вычислим площади треугольников AOB, BOC и AOC:

$$S_{AOB} = \frac{xy \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{xy\sqrt{3}}{4},$$

$$S_{BOC} = \frac{yz \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{yz\sqrt{3}}{4},$$

$$S_{AOC} = \frac{xz \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{xz\sqrt{3}}{4}.$$

Если теперь сложить площади этих треугольников, то мы получим площадь S всего треугольника ABC.

Значит, должно выполняться равенство:

$$S = \frac{xy\sqrt{3}}{4} + \frac{yz\sqrt{3}}{4} + \frac{zx\sqrt{3}}{4} = 10\sqrt{3}\,.$$

Откуда найдём, что $xy + yz + zx = 40$.

Ответ: 40.

Какие значения может принимать искомая сумма в примере 8, если не требовать положительности чисел x, y и z ? Какова будет геометрическая интерпретация системы уравнений в таких случаях?

ЗАДАЧИ

41. ★★☆ Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$.

42. ★★☆ Положительные числа x, y, z таковы, что:
$x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + z^2 + xz = 5$, $z^2 + y^2 + \sqrt{3}\,yz = 1$. Найдите сумму $2xy + yz + \sqrt{3}\,xz$.

43. ★★☆ Для положительных чисел x и y решите уравнение:
$\sqrt{9 - 3\sqrt{3}x + x^2} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}xy + y^2} + \sqrt{y^2 - 4\sqrt{3}y + 16} = 5$.

44. ★★★ Даны отрезки с длинами a и b.
Циркулем и линейкой постройте отрезок длины: а) $\sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab}$; б) $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

45. ★★★ Для чисел x, $y > 0$ выполняется равенство:

$$\sqrt{25 - 5\sqrt{3}x + x^2} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}xy + y^2} + \sqrt{y^2 - 12\sqrt{3}y + 144} = 13.$$

Найдите сумму $5x + 12y + xy$.

46. ★★★ Положительные числа x, y, z таковы, что $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3, \\ y^2 + z^2 + yz = 16. \end{cases}$

Найдите наибольшее значение суммы $xy + yz + zx$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

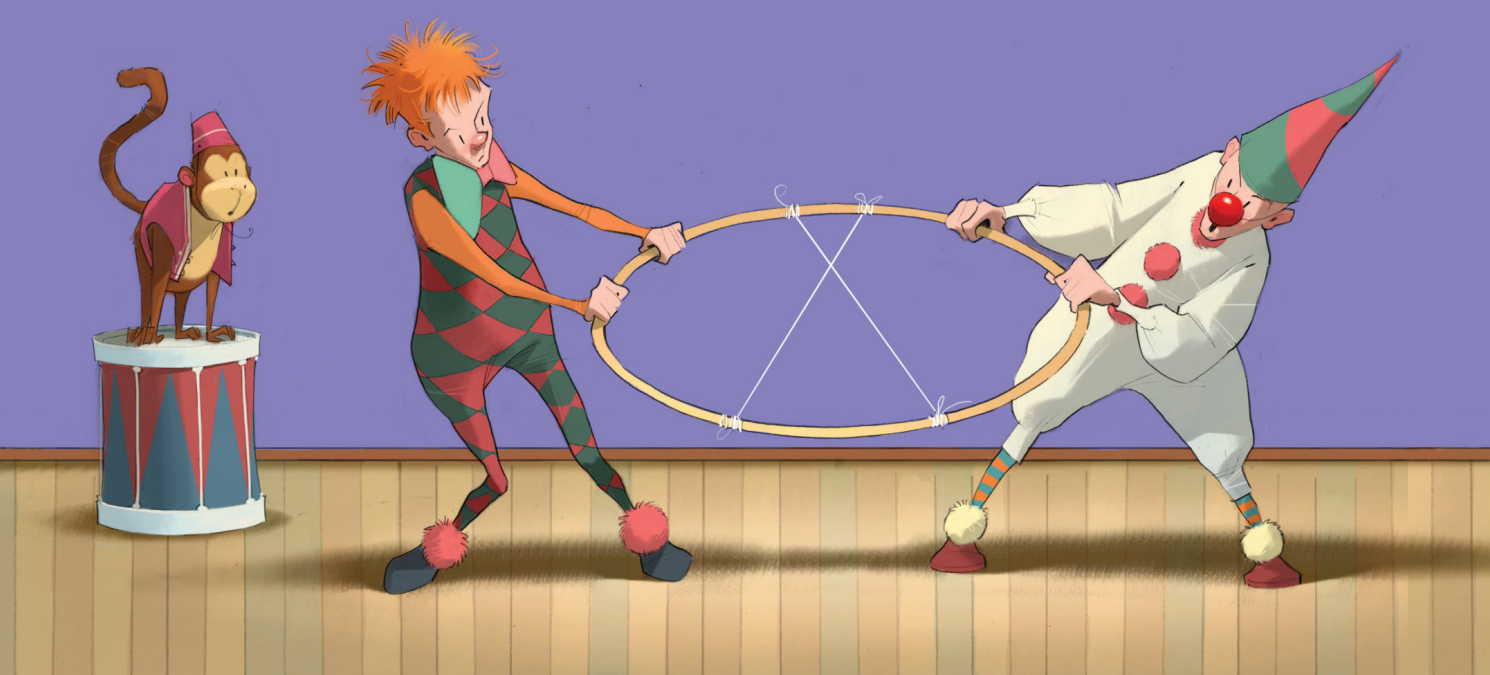
2 ГЛАВА

Подобие

§4. Подобие треугольников

§5. Теоремы Чевы и Менелая

§6. Подобие треугольников в окружности



§4 Подобие треугольников

Напоминания

В этом параграфе мы более подробно рассмотрим подобные треугольники, о которых уже говорили с вами в 8 классе. Подобие фигур теперь будет нам встречаться в самых разных ситуациях: в треугольниках, окружностях, преобразованиях плоскости. Поэтому сейчас необходимо повторить знакомые вам признаки подобия треугольников и узнать новые идеи, связанные с подобием.

Сначала давайте вспомним, что такое подобные фигуры. Когда мы пользуемся словом «подобие», то всегда сравниваем между собой какие-то объекты. Возьмём пример из литературы. Лев Толстой говорил так: «Человек подобен дроби: в знаменателе — он то, что о себе думает, в числителе — то, что есть на самом деле». В этом высказывании слово «подобие» используется только по ассоциации. В математике же термин «подобие» имеет точно определённое значение. Посмотрите на рисунок 1. Сразу видно, что на нём изображены очень похожие, или подобные, объекты. За этой внешней схожестью стоит одинаковая форма, которую они имеют. Именно совпадение у фигур формы при различии их размеров называют в геометрии **подобием**. Например, все оригами на рисунке 2 имеют одинаковую форму потому, что они сделаны из листов бумаги одного формата по одной и той же схеме. Так же подобны костюмы одного покроя или ботинки одного фасона, размеры которых различны.



Рис. 1

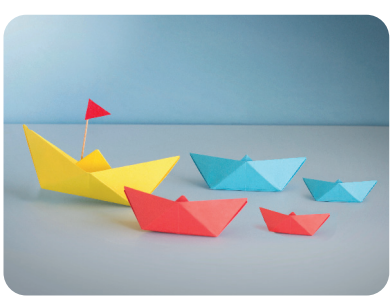


Рис. 2

Правда, внешняя схожесть предметов бывает обманчивой. Иногда два предмета, на первый взгляд имеющие похожую форму, не являются подобными с точки зрения геометрии. Посмотрите на лопаты, показанные на рисунке 3. Каждая из них имеет свою уникальную форму, благодаря которой лучше подходит к своему назначению. Легко понять, что лопатой для уборки снега неудобно копать землю.

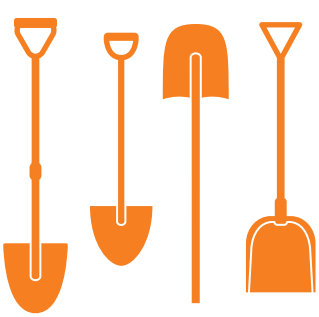
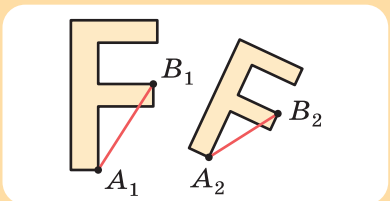


Рис. 3

Чтобы не ошибаться в том, какие фигуры подобны, а какие только похожи, давайте вспомним определение, которое мы давали в 8 классе:

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Две фигуры называют **подобными**, если расстояния между любыми двумя точками одной фигуры в одно и то же число раз больше (или меньше) расстояний между соответственными точками другой фигуры. Данное число называют **коэффициентом подобия фигур**.



В данном определении сказано о соответственных точках двух подобных фигур. Это означает, что для каждой точки одной фигуры можно найти пару (или соответственную ей точку) в другой фигуре. То есть, для того чтобы доказать подобие двух фигур в общем случае, нужно сначала установить некоторое соответствие между точками этих фигур, а уже потом проверять отношение расстояний между ними.

На рисунке 4 показаны несколько расстояний между соответственными точками в подобных фигурах. Более подробно мы поговорим о соответственных точках и элементах подобных фигур в конце этого параграфа. А сейчас заметим, что подобные фигуры могут не быть многоугольниками. Например, любые две окружности или два круга тоже подобны, хотя не имеют углов. В таких случаях искать соответствие между точками фигур бывает сложнее, ведь у них нет вершин, которые есть у любого многоугольника.

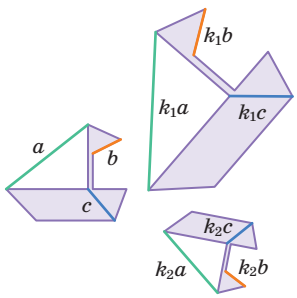


Рис. 4
Все три фигуры корабликов попарно подобны между собой. Коэффициент подобия первой и второй фигур равен k_1, а первой и третьей — k_2. Чему равен коэффициет подобия второй и третьей фигур?

Конечно, два подобных многоугольника должны иметь одинаковые углы. Строго это можно вывести из третьего признака подобия треугольников. Но полезно помнить, что в обратную сторону данное заключение не работает: на рисунке вы можете видеть два прямоугольника, все углы которых равны, а стороны относятся по-разному (рис. 5). Недостаточно для подобия двух многоугольников и равенства отношений всех их соответственных сторон: ромб и квадрат имеют равные стороны, а углы у них разные. Попробуйте придумать сами ещё несколько таких примеров.

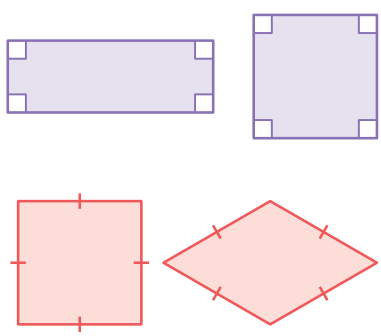
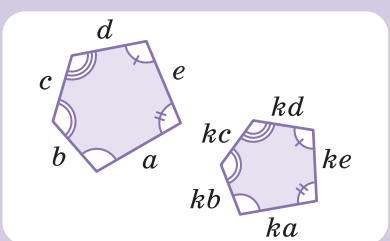


Рис. 5

Как же убедиться в том, что два многоугольника подобны, не проверяя всех расстояний между парами их соответственных точек? Для этого мы в 8 классе сформулировали признак подобия многоугольников. Давайте его напомним:

ПРИЗНАК ПОДОБИЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Если все углы одного многоугольника соответственно равны углам другого, а все их стороны соответственно пропорциональны, то такие многоугольники подобны.



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

УПРАЖНЕНИЕ

1. Разрежьте каждую из фигур, изображённых на клетчатой бумаге, на два подобных друг другу многоугольника (рис. 6). С каким коэффициентом подобны эти многоугольники?

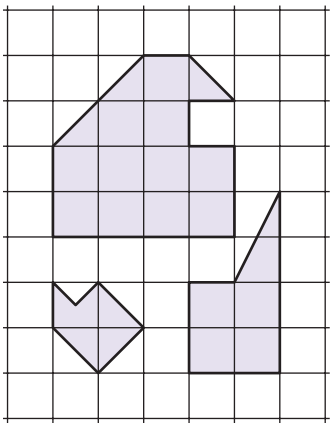
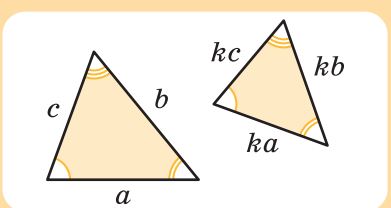


Рис. 6

Конечно, пользоваться таким признаком подобия для двух многоугольников не всегда удобно: надо проверять равенство всех пар углов и отношения всех сторон. Поэтому на практике обычно используют признаки подобия треугольников, которые формулируются проще. Ведь любые два многоугольника можно соответственно разбить на треугольники, а потом доказать подобие этих треугольников. Для подобия же треугольников обычно дают избыточное, но легко запоминающееся определение.

Два треугольника называются **подобными**, если все их стороны пропорциональны, а соответственные углы равны.



Подобие двух треугольников тоже проверяют не по определению. Для этого существуют признаки подобия треугольников. Пользуясь ими, доказывают подобие двух треугольников, а потом из определения уже получают другие следствия.

Основных признаков подобия треугольников всего три — они показаны на рисунке 7.

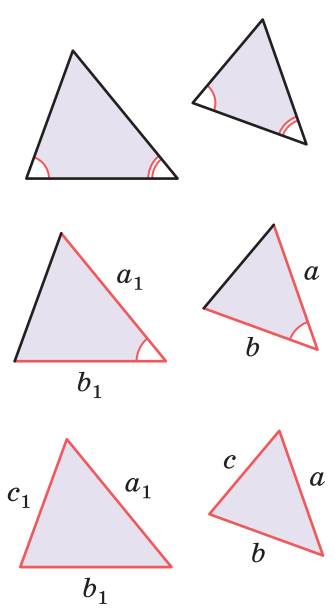


Рис. 7

УПРАЖНЕНИЯ

2. Сформулируйте для каждого из данных рисунков соответствующий ему признак подобия треугольников (рис. 7).

3. На клетчатой бумаге изображены треугольник ABC и отрезок KM (рис. 8). Перенесите этот рисунок в тетрадь и отметьте такую точку L, чтобы треугольник KLM был подобен треугольнику ABC. Чему равен

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

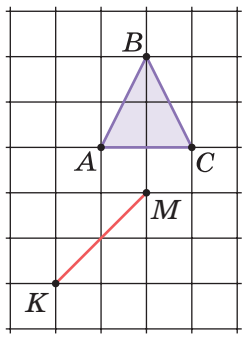


Рис. 8

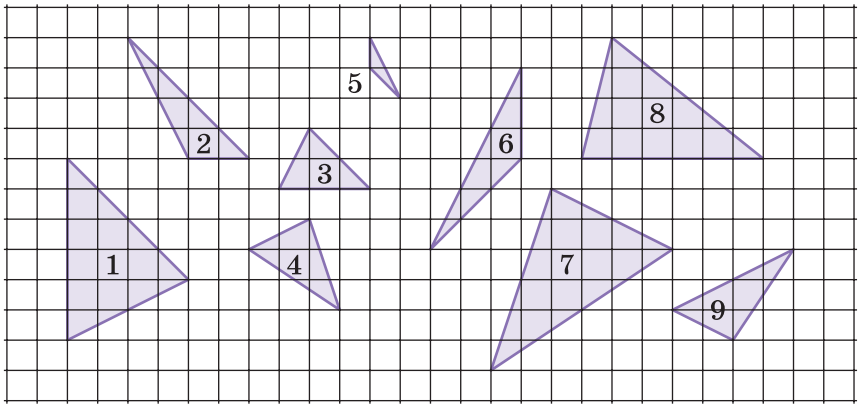


Рис. 9

коэффициент подобия этих треугольников? Сколько решений имеет задача?

4. На рисунке 9 изображены девять треугольников. Выпишите все пары номеров подобных треугольников.



Рис. 10

Стандартные положения подобия

Даже зная признаки подобия треугольников, бывает непросто заметить их на рисунке: на нём может быть много треугольников, и неизвестно, какие из них подобны. Бывает, что для получения подобных треугольников необходимо даже сделать дополнительное построение, и тогда непонятно, каким оно должно быть.

Для того чтобы было проще ориентироваться во всём многообразии случаев, обычно выделяют так называемые «стандартные» положения, в которых возникают подобные треугольники. С двумя такими стандартными положениями вы уже познакомились в 8 классе. Давайте их сейчас вспомним.

Если одна секущая пересекает две параллельные прямые, то при ней всегда образуются пары равных накрест лежащих и соответственных углов. Поэтому если провести две такие секущие, то сразу возникнет пара подобных треугольников. Доказать их подобие очень просто, ведь эти треугольники будут подобны по двум углам, или по первому признаку подобия!

Первое стандартное положение будет, когда секущие пересекаются вне полосы между параллельными. Оно чем-то напоминает пирамиду (рис. 10, 11). Второе положение напоминает песочные часы и возникает, когда секущие пересекаются между параллельными прямыми (рис. 12, 13).

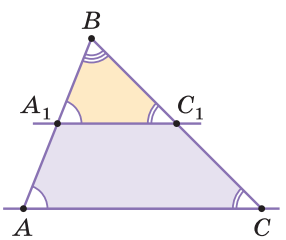


Рис. 11



Рис. 12

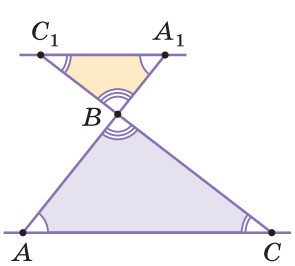


Рис. 13

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

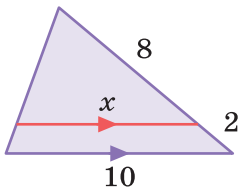


Рис. 14

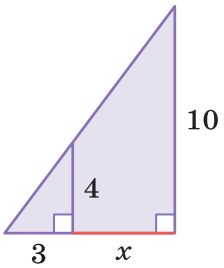


Рис. 15

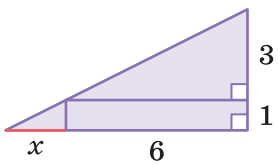


Рис. 16

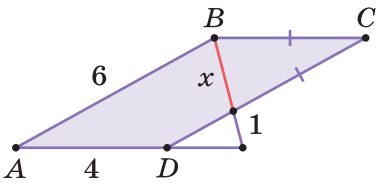


Рис. 17

УПРАЖНЕНИЯ

5. Человек стоит на расстоянии 5 м от фонарного столба высотой 5,6 м и отбрасывает тень, равную 2 м. Найдите рост человека.

6. На рисунке 14 стрелочками отмечены параллельные прямые. На рисунке 17 изображён параллелограмм. Найдите на рисунках 14—17 длину отрезка, обозначенного буквой x.

7. На рисунке 18 изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет длину 3 м, а длинное плечо — 5 м. На сколько метров опустится конец длинного плеча, когда конец короткого поднимется на 0,6 м?

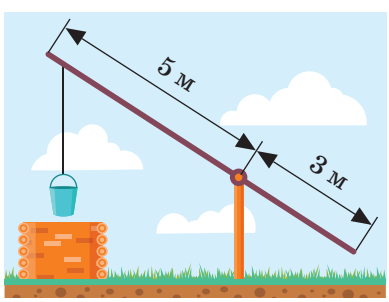
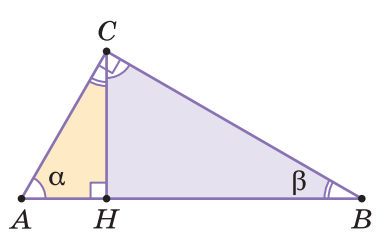


Рис. 18

Ещё одно стандартное положение подобных треугольников возникает, если в прямоугольном треугольнике опустить высоту на гипотенузу (рис. 19). Например, высота CH, опущенная на гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC, разбивает его на меньшие треугольники ACH и CBH, которые ему подобны. Первый раз с таким стандартным положением вы познакомились в 8 классе, когда с помощью подобия доказывали теорему Пифагора. А сейчас давайте заметим, что коэффициенты подобия двух треугольников этого разбиения ко всему треугольнику ABC равны косинусам его острых углов α и β. Например, коэффициент k_1 подобия треугольников ACH и ABC равен отношению их гипотенуз, поэтому $k_1 = AC : AB = \cos\alpha$. Точно так же треугольники CBH и ABC подобны с коэффициентом $k_2 = BC : AB = \cos\beta$.



$\triangle ACH \sim \triangle ABC$	$\triangle CBH \sim \triangle ABC$
$k_1 = \cos\alpha$	$k_2 = \cos\beta$

Рис. 19
Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, делит его на два подобных треугольника

То, что прямоугольный треугольник можно разбить на два подобных ему треугольника, является почти уникальным его свойством. Почему почти? Дело в том, что, кроме него, пока существует только один другой

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

пример разбиения плоской фигуры на две меньшие и подобные ей фигуры. Этот пример был придуман только в XX веке математиком-любителем Робертом Амманном и называется *шестиугольником Амманна* (рис. 20). Только в 2010 году было доказано, что нет других фигур, допускающих такое же разбиение!

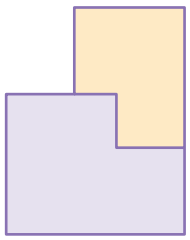


Рис. 20

Шестиугольник Амманна можно разбить на две подобные ему части. Меньшая из них относится к большей части так же, как эта большая часть относится к целому шестиугольнику. Чему равен коэффициент подобия этих двух частей друг к другу?

УПРАЖНЕНИЯ

8. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет есть среднее геометрическое гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

9. В прямоугольном треугольнике провели высоту. Найдите сумму квадратов $\left(k_1^2 + k_2^2\right)$ коэффициентов подобия, получившихся частей к целому треугольнику.

Подобие, связанное с основаниями высот

С высотами треугольника связано ещё одно подобие, о котором мы сейчас с вами поговорим. Давайте проведём в любом остроугольном треугольнике ABC две его высоты AA_1 и CC_1 и отрезком соединим их основания (рис. 21). На рисунке сразу образуется много треугольников. Можете вы сказать, какие из них подобны друг другу?

Поскольку на этом рисунке нет параллельных прямых, то стандартные положения «пирамида» и «песочные часы» здесь не возникают. Нет на нём и ни одной высоты, опущенной в прямоугольном треугольнике на его гипотенузу, то есть третьего «стандартного» положения. Поэтому перед нами новая конструкция. Мы выясним, что треугольники ABC и A_1BC_1 подобны сейчас, и запишем это как теорему.

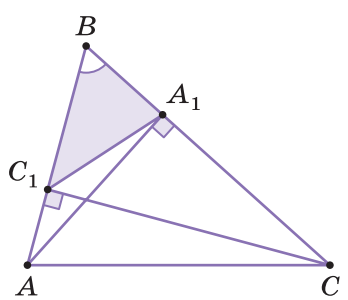
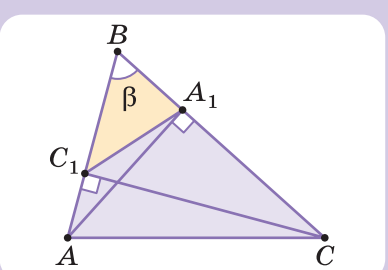


Рис. 21
Сколько пар подобных треугольников на рисунке?

ТЕОРЕМА

Если в остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1, то треугольник A_1BC_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом $k = \cos\beta$, где β — величина угла ABC.



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Треугольники ABC и A_1BC_1 имеют общий угол при вершине B. Чтобы доказать их подобие, достаточно проверить, что стороны этих треугольников, заключающих данный угол, относятся одинаково. Тогда такие треугольники будут подобны по второму признаку.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABA_1 (рис. 22). В нём по определению можно записать, что

$$\cos\beta = \frac{BA_1}{BA}.$$

Так же из прямоугольного треугольника CBC_1 можно найти, что

$$\cos\beta = \frac{BC_1}{BC} \text{ (рис. 23).}$$

Таким образом, мы получаем равенство

$$\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC}.$$

Значит, треугольники ABC и A_1BC_1 подобны по второму признаку подобия треугольников.

Заметим, что коэффициент подобия этих треугольников равен отношению их соответственных сторон. Значит,

$$k = \frac{BA_1}{BA} = \cos\beta.$$

Что и требовалось доказать.

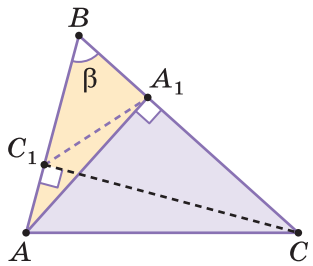


Рис. 22

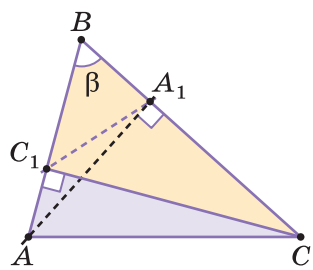


Рис. 23

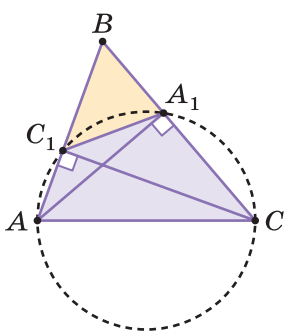


Рис. 24

УПРАЖНЕНИЯ

10. Доказать подобие треугольников ABC и A_1BC_1 можно и с помощью вписанных углов. Пользуясь рисунком 24, докажите, что два эти треугольника подобны по первому признаку.

11. На рисунке 25 изображён треугольник, в котором проведены две высоты. Найдите величину угла, обозначенного буквой β.

12. Найдите длину отрезка, обозначенного буквой x на рисунке 26, если сторона клетки равна 1.

13. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Найдите угол ABC, если известно, что отрезок A_1C_1 делит площадь треугольника ABC пополам.

14. В треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1 и биссектрису CE. Найдите величину угла ACB, если отрезок A_1B_1 делит данную биссектрису пополам.

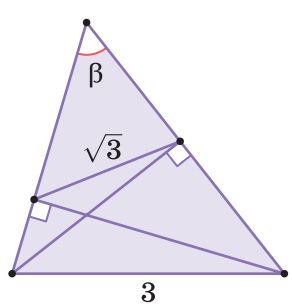


Рис. 25

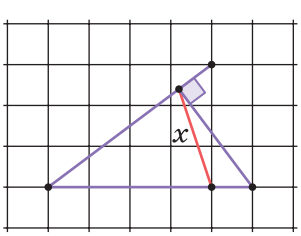


Рис. 26

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Что происходит с отрезками и углами?

Подобные фигуры имеют одинаковую форму. Интуиция нам подсказывает, что фигура, подобная отрезку, должна быть тоже отрезком, а углы при подобии вообще не меняются. Давайте докажем это, пользуясь определением подобия.

ТЕОРЕМА

Фигура, подобная отрезку, является отрезком.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть отрезок AB подобен некоторой фигуре F. Возьмём на этом отрезке произвольную точку C. По определению подобия расстояние между любой парой точек фигуры F должно быть в k раз больше (или меньше) расстояния между соответственными точками отрезка AB. Пусть точкам A, B и C соответствуют точки A_1, B_1 и C_1 фигуры F (рис. 27). Тогда $A_1C_1 = k \cdot AC$, $B_1C_1 = k \cdot BC$ и $A_1B_1 = k \cdot AB$.

Поскольку точка C лежит на отрезке AB, по аксиоме должно выполняться равенство $AC + BC = AB$. Отсюда следует, что $k \cdot AC + k \cdot BC = k \cdot AB$. Поэтому для точек A_1, B_1 и C_1 должно выполняться такое же равенство $A_1C_1 + B_1C_1 = A_1B_1$. А это равенство возможно, только* если точка C_1 лежит на отрезке A_1B_1. Таким образом, все точки C_1 фигуры F лежат на отрезке A_1B_1.

Кроме того, каждой точке C_1 на отрезке A_1B_1 будет соответствовать точка C на отрезке AB, которая делит его в том же отношении. Поэтому фигура F будет состоять из всех точек, лежащих между концами отрезка A_1B_1, то есть она будет отрезком.

Что и требовалось доказать.

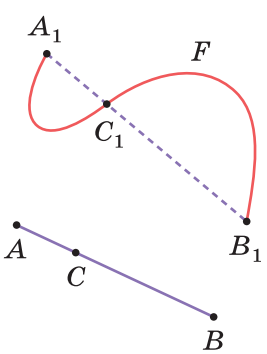


Рис. 27

УПРАЖНЕНИЕ

15. По определению подобия докажите, что фигура:
а) подобная прямой линии, является прямой;
б) подобная окружности, является окружностью (рис. 28).

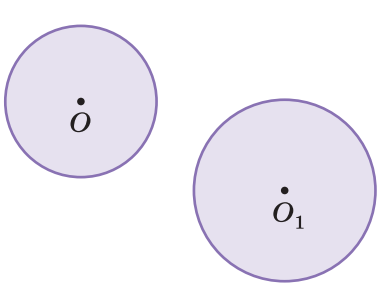


Рис. 28

* В противном случае будет выполнено неравенство треугольника $A_1C_1 + B_1C_1 > A_1B_1$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Если на отрезок посмотреть в увеличительное стекло, то его длина увеличится. А если через то же стекло посмотреть на угол, то он не изменится. И происходит так потому, что все подобные углы равны. Давайте это сформулируем как теорему.

ТЕОРЕМА

Фигура, подобная углу, является равным ему углом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть два угла подобны как фигуры. Обозначим вершину одного из них буквой O и возьмём на его сторонах произвольные точки A и B. Фигура, подобная лучу, является лучом, поэтому вершине O будет соответствовать вершина O_1 другого угла, а точкам A и B — точки A_1 и B_1 на его сторонах. По определению подобия все расстояния между соответственными точками в подобных фигурах должны различаться в k раз, поэтому $O_1A_1 = k \cdot OA$, $O_1B_1 = k \cdot OB$, $A_1B_1 = k \cdot AB$.

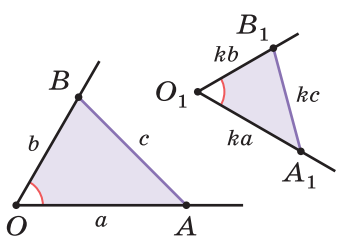


Рис. 29

Рассмотрим треугольники AOB и $A_1O_1B_1$ (рис. 29). Они подобны по третьему признаку подобия треугольников. Значит, равны их углы при вершинах O и O_1. То есть подобные углы равны.

Что и требовалось доказать.

☞ Доказанная теорема объясняет, почему у подобных многоугольников соответственно равные все углы.

Соответствие в подобных фигурах

Когда мы видим подобные предметы в окружающем мире, то интуитивно чувствуем совпадение их формы вне зависимости от расположения: можно передвинуть или повернуть один из таких предметов — наше восприятие от этого не изменится. Можно сказать, что мы как будто совмещаем эти предметы в уме, мысленно перемещая их и растягивая (рис. 30). Обычно при этом мы не рассматриваем предметы целиком, а выделяем в них похожие части и проверяем соотношение этих частей. То есть подсознательно находим


Рис. 30

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



Рис. 31



Рис. 32



Рис. 33

в них соответственные элементы и проверяем их пропорциональность.

При этом интуиция может нас иногда обманывать. Например, дозаторы для жидкого мыла на рисунке 31 выглядят подобными друг другу. В действительности это не так, потому что у них одинаковый диаметр горлышка и вообще всей крышки. А если бы они были подобными фигурами, то размеры их горлышек относились бы друг к другу, как коэффициент подобия, отличный от 1. Аналогично большая и маленькая бутылка не подобны друг другу, потому что крышка от одной бутылки подходит к другой (рис. 32).





УПРАЖНЕНИЯ

16. Почему прищепки, изображённые на рисунке 33, не подобны между собой?

17. Объясните, почему две лампочки с одним и тем же цоколем могут быть равны между собой, но не могут быть подобны?

18. Объясните, почему две шестерёнки разного размера, которые вращают друг друга, не могут быть подобны между собой?

Понятие соответственных точек в подобных фигурах прямо связано с определением подобия. Ведь фигуры называют подобными тогда, когда расстояние между любыми парами точек одной фигуры в одно и то же число раз больше (или меньше) расстояния между парами соответственных им точек другой фигуры. Значит, уже в самом определении предполагается, что существует некоторое *соответствие* между всеми точками этих фигур (рис. 34). Значит, при подобии двух многоугольников можно говорить не только

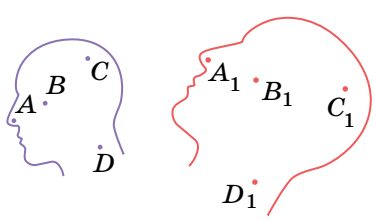


Рис. 34

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

о соответствии их вершин, но и о соответствии других элементов: сторон, углов и диагоналей.

Соответственные части (или элементы) в подобных фигурах естественно определить как множества, которые состоят из соответственных точек этих фигур (рис. 35). По определению подобия такие элементы сами будут подобными фигурами. Вот почему они должны иметь одну и ту же форму: отрезку должен соответствовать отрезок, окружности — окружность, а углу — угол.

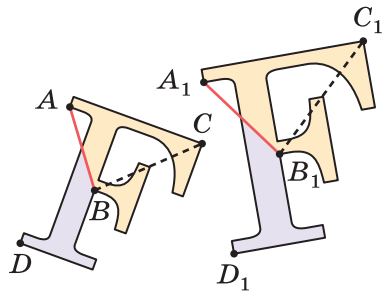


Рис. 35
Точкам A, B, C, D фигуры слева соответствуют точки A_1, B_1, C_1, D_1 фигуры справа

При рассмотрении подобных треугольников часто говорят не только про их соответственные вершины, стороны или углы, но и про другие элементы. Например, говорят о соответственных медианах, высотах или вписанных окружностях.

Для примера покажем, что медиане BM треугольника ABC соответствует медиана B_1M_1 подобного ему треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 36). Пусть точке M треугольника ABC соответствует точка M_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Точка M лежит на отрезке AC и делит его в отношении $1:1$. Значит, по доказанной нами теореме, точка M_1 должна лежать на отрезке A_1C_1. А поскольку расстояния между соответственными точками в подобных фигурах относятся одинаково, то $A_1M_1 = k \cdot AM$, $C_1M_1 = k \cdot CM$, где k — коэффициент подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Значит, $A_1M_1 : C_1M_1 = AM : CM = 1$. То есть M_1 — середина стороны A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Так как при подобии отрезку соответствует отрезок, то медиане BM треугольника ABC соответствует медиана B_1M_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

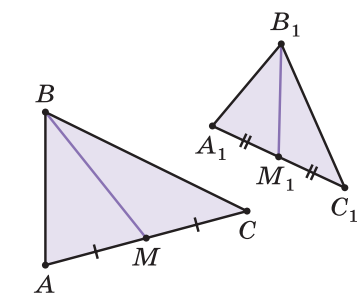


Рис. 36

Аналогично можно доказать, что высоте AH треугольника ABC соответствует высота A_1H_1 в подобном ему треугольнике $A_1B_1C_1$ (рис. 37), а каждой его биссектрисе соответствует биссектриса соответственного угла. То же самое верно для радиусов вписанных или описанных окружностей подобных треугольников.

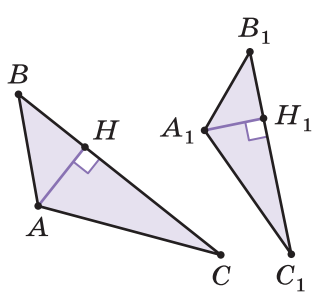


Рис. 37

УПРАЖНЕНИЯ

19. Докажите, что в подобных треугольниках биссектрисы равных углов соответствуют друг другу.

20. На рисунке 38 изображены два подобных треугольника, внутри которых отмечены точки. Определите, какая из отмеченных точек какой соответствует.

21. На рисунке 39 изображены два подобных друг другу параллелограмма. Определите, являются ли соответственными: а) проведённые в них диагонали; б) отмеченные точки X и X_1.

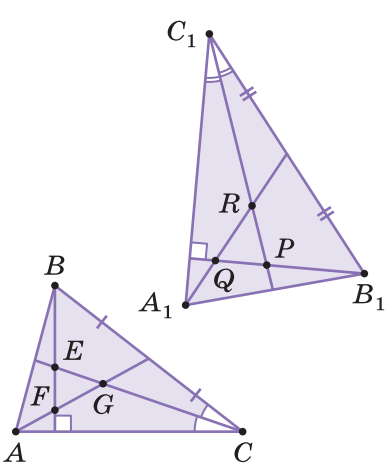


Рис. 38

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

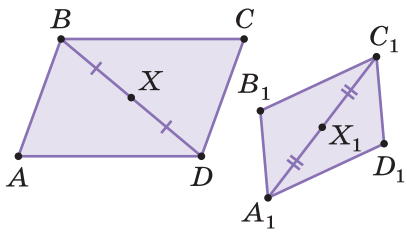


Рис. 39

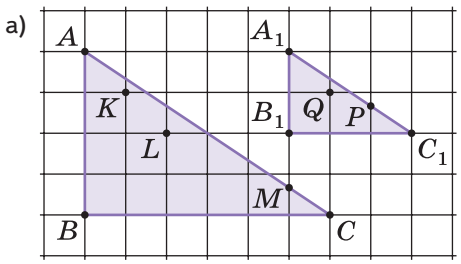
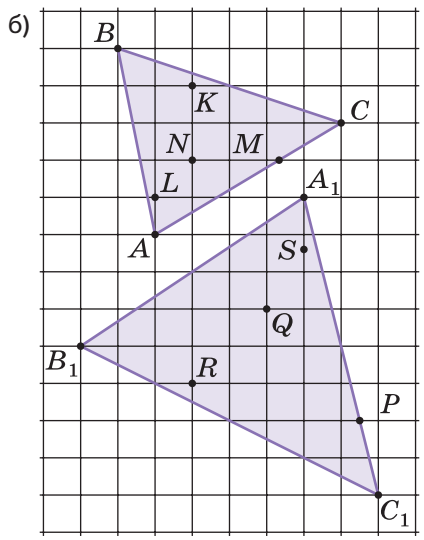


Рис. 40



22. На рисунке 40 изображены пары подобных треугольников. В каждом случае определите, какие пары из отмеченных в них точек являются соответственными.

23. На рисунке 41 изображены пары подобных треугольников. Определите, являются ли точки X и X_1 для них соответственными.

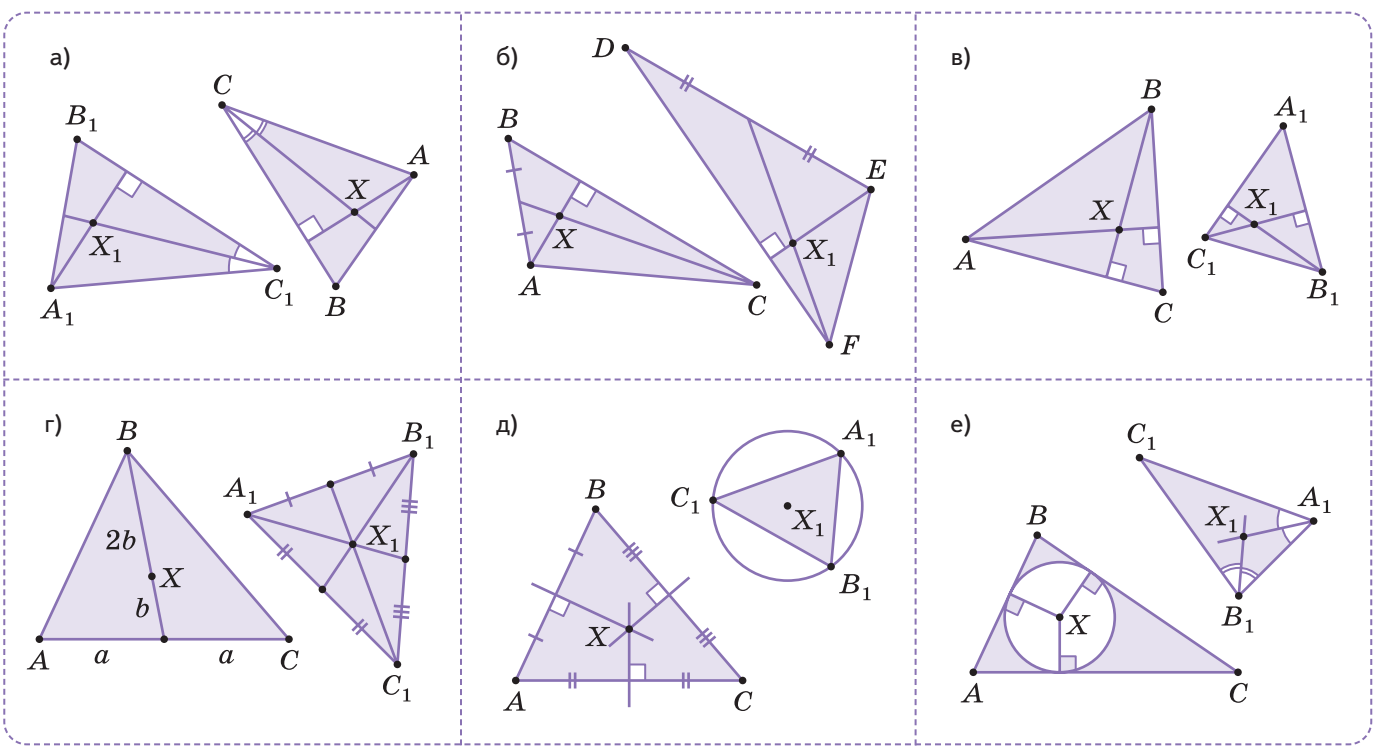


Рис. 41

Соответствие элементов в подобных фигурах позволяет находить длины, отношения и углы одной фигуры через соответственные им элементы другой фигуры. Например, по плану здания архитектор может вычислить размеры всех элементов будущего дома ещё до возведения его в натуральную величину, по чертежу детали инженер

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

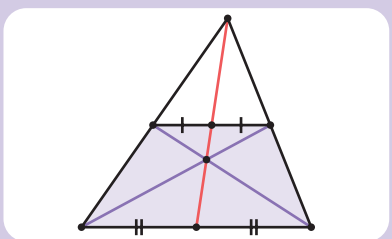
определит её размеры, а по фотографии с человеком, стоящим рядом с деревом, можно оценить размеры дерева. Так же по следу, оставленному зверем, опытный охотник может определить не только какой зверь проходил в этом месте, но и размеры самого зверя.

Давайте посмотрим, как применяются свойства соответственных элементов подобных треугольников в геометрии, на примере следующего свойства трапеции.



ЗАМЕЧАТЕЛЬНОЕ СВОЙСТВО ТРАПЕЦИИ

В трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть M и N — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$, а точка E — пересечение прямых AB и CD (рис. 42). Докажем сначала, что точки E, M и N лежат на одной прямой. Поскольку прямые BC и AD параллельны, то треугольники BEC и AED подобны и образуют стандартное положение «пирамида». Медианы EM и EN являются соответственными элементами этих треугольников. Поэтому они образуют равные углы с их соответственными сторонами EC и ED. Следовательно, точки E, M и N лежат на одной прямой.

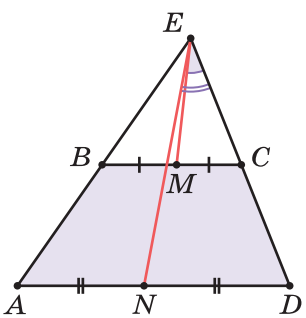


Рис. 42

Докажем теперь, что точки M и N лежат на одной прямой с точкой O пересечения диагоналей трапеции. Для этого рассмотрим треугольники OCB и OAD, которые тоже подобны и образуют стандартное положение «песочные часы» (рис. 43). Медианы OM и ON этих треугольников соответствуют друг другу и поэтому образуют равные углы с их сторонами OB и OD. Поскольку углы BOM и DON равны, то угол MON будет равен 180°. Тогда M, O и N лежат на одной прямой. Следовательно, все четыре точки M, N, E и O лежат на одной прямой.

Что и требовалось доказать.

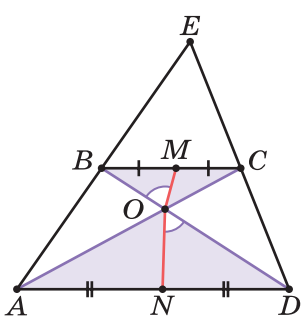


Рис. 43

УПРАЖНЕНИЯ

24. Отрезок лежит на одной из двух параллельных прямых. С помощью одной линейки разделите его пополам.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

25. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что угол PCB равен углу QAB (рис. 44). Точки M и N являются серединами отрезков AQ и CP соответственно. Докажите, что угол ABN равен углу CBM.

26. Высота прямоугольного треугольника разбивает его на два меньших треугольника. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны 3 и 4. Найдите радиус окружности, вписанной в исходный треугольник.

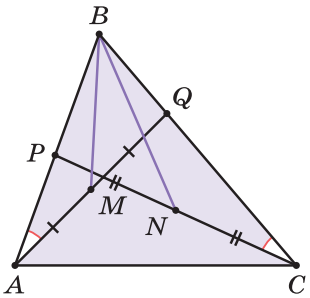


Рис. 44

ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте признаки подобия треугольников.
2. По какому признаку подобны треугольники, образующие стандартные положения «пирамида» и «песочные часы»?
3. Сколько образуется пар подобных треугольников, если в прямоугольном треугольнике опустить высоту на гипотенузу?
4. В треугольнике отметили его вершины и основания трёх его высот. Сколько образуется пар подобных треугольников с вершинами в отмеченных точках?
5. Какие части (элементы) подобных фигур называют соответственными?
6. Какие фигуры подобны отрезку, прямой, углу?
7. Сформулируйте замечательное свойство трапеции.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1. ★☆☆ Проектор полностью освещает экран A высотой 70 см, расположенный на расстоянии 110 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран B высотой 210 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?

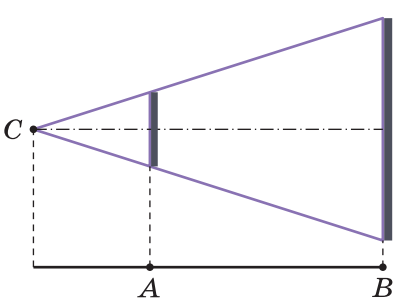


Рис. 45

РЕШЕНИЕ

В данной задаче мы будем считать проектор точкой, из которой выходят лучи света. Раз настройки проектора остались неизменными, то угол, под которым выходят эти лучи из проектора, тоже остался неизменными. Расположим экран B таким образом, как показано на рисунке 45.

Обозначим верхний и нижний края экрана A через K и L, а верхний и нижний края экрана B — через M и N соответственно (рис. 46). Оба экрана расположены вертикально, то есть параллельно друг другу, и поэтому треугольники CKL и CMN подобны, так как образуют стандартное положение «пирамида». Значит, стороны KL и MN

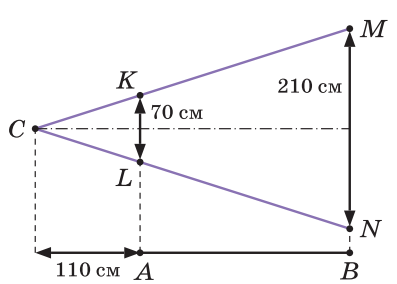


Рис. 46

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

этих треугольников относятся так же, как высоты, проведённые к этим сторонам.

Длина высоты, проведённой из точки C до KL, равна расстоянию от проектора до экрана A, то есть 110 см. Тогда, обозначив неизвестное расстояние от проектора до экрана B через x, можно составить пропорцию

$$\frac{110}{x} = \frac{KL}{MN}; \frac{110}{x} = \frac{70}{210}.$$

Откуда находим $x = 330$ см.

Ответ: 330 см.

ПРИМЕР 2. ★☆☆ Две окружности расположены вне друг друга. Из центра каждой из них к другой проведены две касательные. Докажите, что хорды, соединяющие точки пересечения этих касательных с данными окружностями, равны между собой (рис. 47). Найдите длину этих хорд, если радиусы окружностей равны R и r, а расстояние между их центрами равно d.

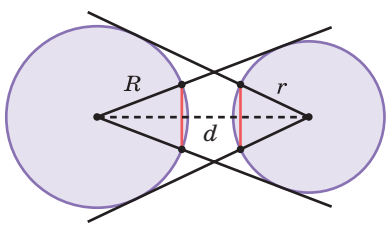


Рис. 47

РЕШЕНИЕ

Обозначим центры данных окружностей радиусов R и r соответственно буквами O_1 и O_2, а точки пересечения указанных касательных с первой из них — A и B (рис. 48). Поскольку окружность радиуса r вписана в угол AO_1B, то её центр O_2 лежит на биссектрисе этого угла. Треугольник AO_1B равнобедренный, поэтому хорда AB перпендикулярна прямой O_1O_2 и делит её пополам точкой пересечения H.

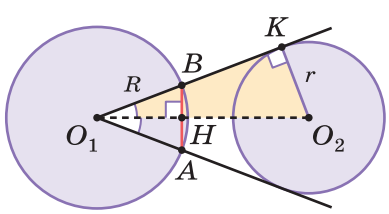


Рис. 48

Пусть прямая O_1B касается окружности радиуса r в точке K. По теореме радиус O_2K окружности перпендикулярен этой касательной. Рассмотрим прямоугольные треугольники O_1BH и O_1O_2K. Они имеют общий угол, следовательно, подобны по первому признаку. Запишем пропорцию для их соответственных сторон: $\frac{BH}{O_2K} = \frac{O_1B}{O_1O_2}$ или $\frac{BH}{r} = \frac{R}{d}$. Откуда $BH = \frac{R \cdot r}{d}$. Значит, хорда AB равна $2 \cdot BH = \frac{2R \cdot r}{d}$. Так же можно найти хорду второй окружности и убедиться, что она равна тому же.

Ответ: $\frac{2R \cdot r}{d}$.

ПРИМЕР 3. ★★☆ На диагонали параллелограмма взяли произвольную точку. Через неё провели две прямые, пересекающие все его стороны в 4 точках (рис. 49). Докажите, что четырёхугольник с вершинами в полученных точках является трапецией или параллелограммом.

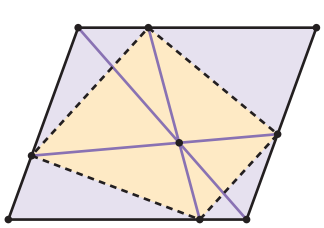


Рис. 49

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

РЕШЕНИЕ

Пусть через произвольную точку O на диагонали BD параллелограмма провели две прямые, одна из которых пересекает его стороны BC и AD соответственно в точках P и Q, а другая — стороны AB и CD соответственно в точках E и M (рис. 50).

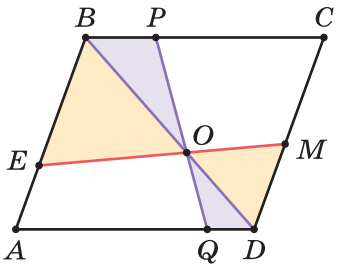


Рис. 50

Поскольку прямые BC и AD параллельны, то треугольники OBP и ODQ подобны и образуют стандартное положение «песочные часы». Запишем пропорцию для их сторон: $PO : OQ = BO : OD$.

Теперь рассмотрим треугольники OBE и ODM. Они тоже образуют положение «песочные часы» при параллельных прямых AB и CD. Значит, эти треугольники подобны и для их сторон можно записать пропорцию $EO : OM = BO : OD$. Таким образом, мы получаем следующее равенство: $PO : OQ = EO : OM$. (1)

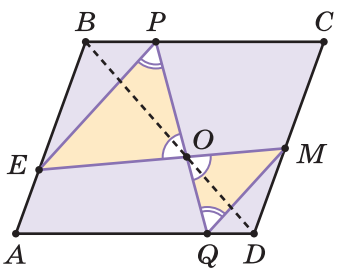


Рис. 51

Давайте теперь рассмотрим треугольники OEP и OMQ. Их углы при вершине O равны, поскольку они вертикальные. Из полученного нами равенства (1) следует, что $OP : OE = OQ : OM$. Значит, отношение сторон этих треугольников, выходящих из вершины O, равны. Поэтому треугольники должны быть подобны по второму признаку. Следовательно, равны их соответственные углы при вершинах P и Q (рис. 51). Данные два угла являются накрест лежащими при секущей PQ и прямых EP и QM. Значит, эти прямые параллельны по признаку. Следовательно, четырёхугольник $EPMQ$ имеет две параллельные стороны, то есть он может быть или трапецией, или параллелограммом.

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 4. ★★☆ Найдите радиус вписанной в треугольник окружности, если один из его углов равен 60°, а высота и биссектриса, выходящие из этого угла, равны h и l (рис. 52).

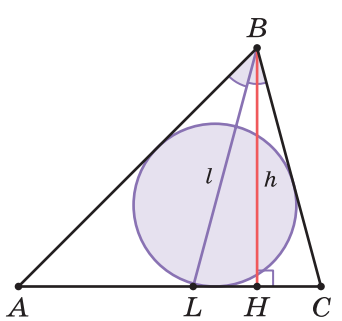


Рис. 52

РЕШЕНИЕ

Пусть угол B треугольника ABC равен 60°, причём из его вершины проведены высота BH и биссектриса BL, длины которых соответственно равны h и l. Обозначим радиус вписанной в треугольник окружности как r, а точки её касания со сторонами AB и AC треугольника соответственно P и K (рис. 53).

Поскольку окружность вписана в угол ABC, то её центр O лежит на биссектрисе этого угла, а радиусы OP и OK перпендикулярны его сторонам.

Рассмотрим прямоугольный треугольник BOP. Его угол при вершине B равен 30°, следовательно, $BO = 2r$. Поэтому $OL = l - 2r$.

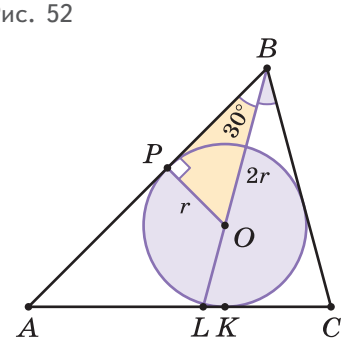


Рис. 53

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Теперь рассмотрим прямоугольные треугольники LOK и LBH (рис. 54). Они имеют общий угол, следовательно, подобны по первому признаку. Запишем пропорцию для их соответственных сторон:

$$\frac{OK}{BH} = \frac{LO}{LB}, \text{ откуда } \frac{r}{h} = \frac{l-2r}{l}.$$

Откуда найдём, что $r = \frac{l \cdot h}{l+2h}$.

Ответ: $r = \frac{l \cdot h}{l+2h}$.

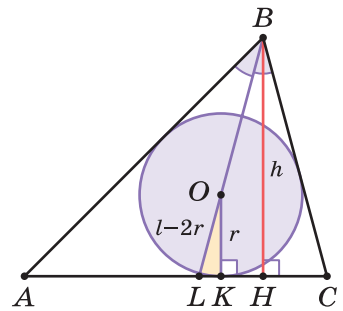


Рис. 54

ПРИМЕР 5. ★★★ Три равные окружности, каждая из которых вписана в один из углов треугольника ABC, проходят через одну точку (рис. 55). Найдите их радиус, если радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC равны R и r.

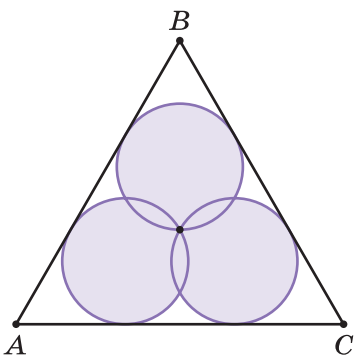


Рис. 55

РЕШЕНИЕ

Пусть три данные окружности имеют радиус x и пересекаются в точке K. Так как каждая из них вписана в один из углов треугольника ABC, то их центры O_1, O_2 и O_3 соответственно лежат на его биссектрисах. Из равенства радиусов окружностей следует, что стороны треугольника $O_1O_2O_3$ параллельны сторонам треугольника ABC. Поэтому треугольники ABC и $O_1O_2O_3$ подобны.

Точка K равноудалена от вершин треугольника $O_1O_2O_3$ на расстояние, равное x, поэтому она служит центром описанной вокруг него окружности (рис. 56). Коэффициент подобия треугольников $O_1O_2O_3$ и ABC равен отношению радиусов описанных вокруг них окружностей, как их соответственных элементов. Поэтому он будет равен $\frac{x}{R}$.

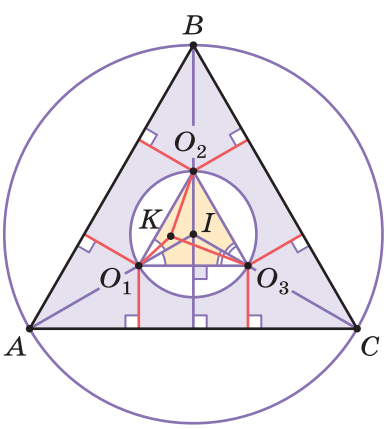


Рис. 56

Поскольку стороны треугольников $O_1O_2O_3$ и ABC попарно параллельны, то биссектрисы треугольника ABC делят углы треугольника $O_1O_2O_3$ пополам, поэтому вписанные в эти треугольники окружности имеют один центр — точку I.

Рассмотрим треугольники O_1IO_3 и AIC (рис. 57). Поскольку прямые O_1O_3 и AC параллельны, то эти треугольники подобны и образуют «пирамиду». Высота треугольника AIC, опущенная из вершины I, равна радиусу r вписанной в треугольник ABC окружности. А соответствующая ей высота треугольника O_1IO_3 будет равна $r - x$. Запишем пропорцию для соответственных элементов этих треугольников: $\frac{r-x}{r} = \frac{O_1O_3}{AC} = \frac{x}{R}$. Откуда находим, что $x = \frac{R \cdot r}{R+r}$.

Ответ: $\frac{R \cdot r}{R+r}$.

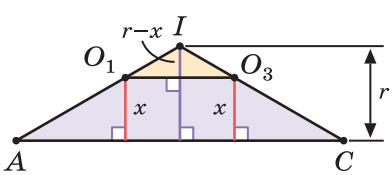
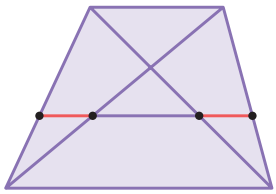
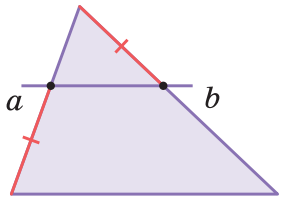


Рис. 57

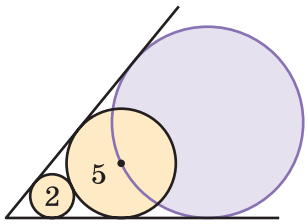
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



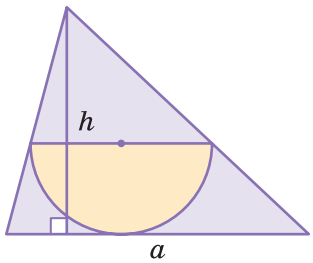
задача 2



задача 3



задача 5



задача 7

ЗАДАЧИ

1. ★☆☆ Угол A треугольника ABC равен 45°, а на стороне BC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и AC в точках K и L. Найдите отношение площадей треугольников ABC и AKL.

2. ★☆☆ Параллельно основаниям трапеции провели прямую, которая пересекает её диагонали. Докажите, что отрезки этой прямой, заключённые между боковыми сторонами трапеции и её диагоналями, равны. (▸▸ рис.)

3. ★☆☆ Длины двух сторон треугольника равны a и b. Прямая, параллельная его третьей стороне, отсекает на них равные отрезки так, как показано на рисунке. Найдите длину этих отрезков. (▸▸ рис.)

4. ★☆☆ В четырёхугольник вписан ромб, стороны которого параллельны диагоналям четырёхугольника. Найдите сторону ромба, если длины его диагоналей равны 6 и 12.

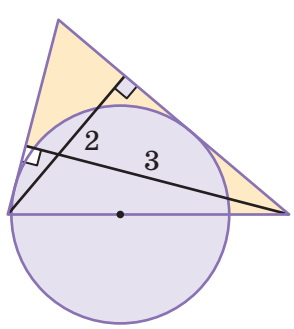
5. ★☆☆ Две окружности с радиусами 2 и 5 вписаны в угол и касаются друг друга. Найдите радиус третьей окружности, вписанной в тот же угол и проходящей через центр большей из них. (▸▸ рис.)

6. ★☆☆ На стороны BC и CD параллелограмма $ABCD$ из тупого угла A опустили перпендикуляры AM и AN. Докажите, что треугольники MAN и ABC подобны.

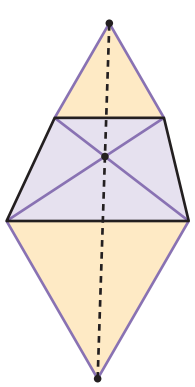
7. ★☆☆ В треугольник вписан полукруг так, что полуокружность касается основания, а его диаметр (с концами на боковых сторонах треугольника) параллелен основанию. Найдите радиус этого полукруга, если основание треугольника равно a, а высота, проведённая к нему, равна h. (▸▸ рис.)

8. ★☆☆ Окружность касается боковых сторон треугольника, а её центр лежит на его основании. Найдите радиус окружности, если высоты треугольника, опущенные на боковые стороны, равны 2 и 3. (▸▸ рис.)

9. ★☆☆ На основаниях трапеции вне её построили правильные треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий две их вершины, не принадлежащие трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей. (▸▸ рис.)

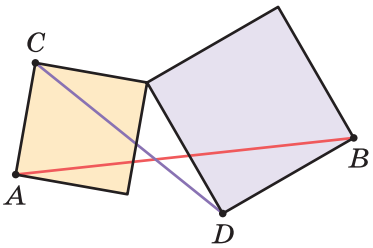


задача 8

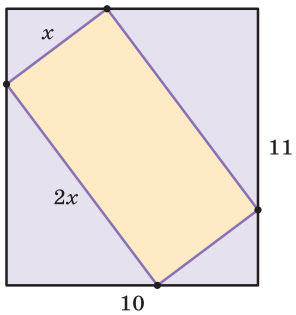


задача 9

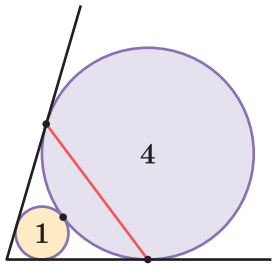
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 10



задача 11



задача 13

10. ★☆☆ Два квадрата, изображённые на рисунке, имеют общую вершину. Найдите отношение отрезков AB и CD. (▸▸ рис.)

11. ★☆☆ В прямоугольник со сторонами 10 и 11 вписан другой прямоугольник, стороны которого относятся как 2 : 1. Найдите периметр этого прямоугольника. (▸▸ рис.)

12. ★☆☆ Стороны египетского треугольника равны 3, 4 и 5. Через центр вписанной в него окружности перпендикулярно гипотенузе провели прямую. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри треугольника.

13. ★☆☆ Окружности с радиусами 1 и 4 вписаны в один угол и касаются друг друга. Найдите расстояние между точками касания большей из этих окружностей со сторонами угла. (▸▸ рис.)

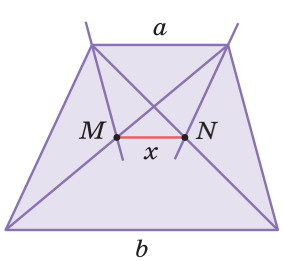
14. ★★☆ Две прямые, проходящие через концы меньшего основания трапеции параллельно её боковым сторонам, пересекают диагонали трапеции в точках M и N. Найдите длину отрезка MN, если меньшее основание трапеции равно a, а большее — b. (▸▸ рис.)

15. ★★☆ Продолжения боковых сторон трапеции пересекаются в точке O. Через эту точку проводят прямую, параллельную её основаниям. Эта прямая пересекает продолжения диагоналей трапеции в точках M и K. Найдите длину отрезка MK, если основания трапеции равны a и b. (▸▸ рис.)

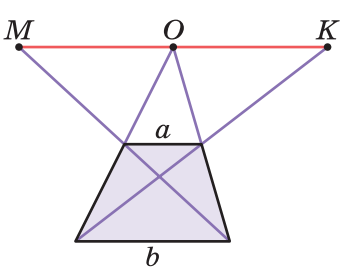
16. ★★☆ На сторонах AB и BC треугольника ABC выбрали произвольные точки M и K. Через них параллельно прямым CK и AM провели прямые, которые пересекли стороны AB и BC в точках P и Q. Докажите, что прямые PQ и AC параллельны. (▸▸ рис.)

17. ★★☆ В треугольнике ABC провели высоты AM и CK. Отрезок MK делит биссектрису BE треугольника в отношении 2 : 3, считая от вершины. В каком отношении данный отрезок делит площадь треугольника?

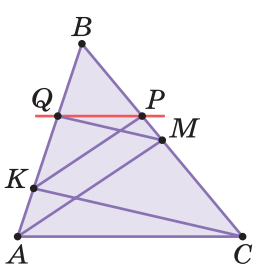
18. ★★☆ Через центр окружности, вписанной в треугольник, параллельно его



задача 14

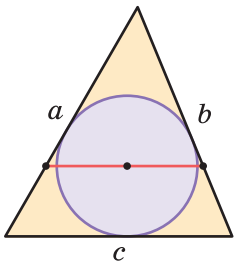


задача 15

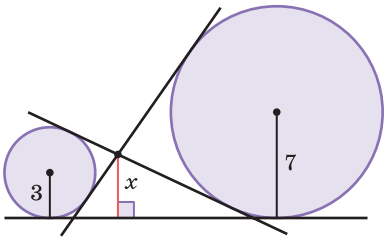


задача 16

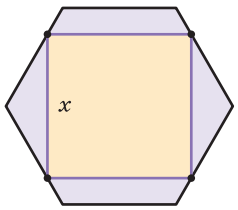
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 18



задача 19



задача 20

стороне провели прямую. Найдите отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, если параллельная ему сторона равна c, а две другие стороны равны a и b. (▸▸ рис.)

19. ★★☆ К двум окружностям с радиусами 3 и 7 проведены одна внешняя и две внутренние общие касательные. Найдите расстояние от точки пересечения внутренних касательных до внешней касательной. (▸▸ рис.)

20. ★★☆ Сторона правильного шестиугольника равна 1. Найдите сторону квадрата, вершины которого лежат на четырёх сторонах шестиугольника, а стороны параллельны диагоналям шестиугольника. (▸▸ рис.)

21. ★★☆ Стороны треугольника равны a, b и c. Три параллельные им прямые отрезают от него равносторонний шестиугольник так, как показано на рисунке. Найдите сторону шестиугольника. (▸▸ рис.)

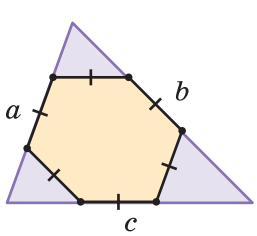
22. ★★☆ Прямая, параллельная гипотенузе египетского треугольника, касается вписанной в него окружности. Найдите отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника.

23. ★★☆ В сектор круга радиуса R вписана окружность. Найдите её радиус, если стягивающая сектор хорда равна m. (▸▸ рис.)

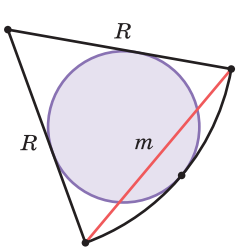
24. ★★☆ В ромб вписали окружность. Найдите площадь четырёхугольника, образованного точками её касания со сторонами ромба, если диагонали ромба равны a и b.

25. ★★☆ Боковые стороны трапеции равны c. В неё вписана окружность радиуса r. Найдите отрезок, соединяющий точки её касания с боковыми сторонами трапеции.

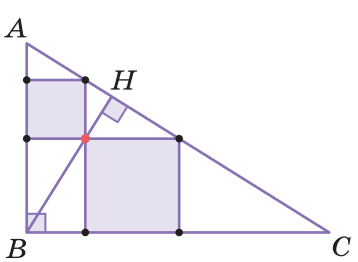
26. ★★☆ В прямоугольном треугольнике ABC провели высоту BH к его гипотенузе. В треугольники ABH и CBH вписали квадраты так, что сторона каждого квадрата лежит на гипотенузе своего треугольника, а две оставшиеся вершины на его катетах. Докажите, что эти квадраты имеют общую точку. (▸▸ рис.)



задача 21

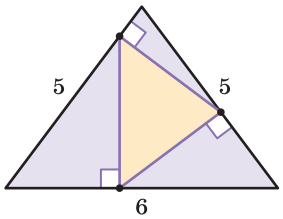


задача 23

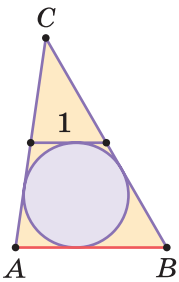


задача 26

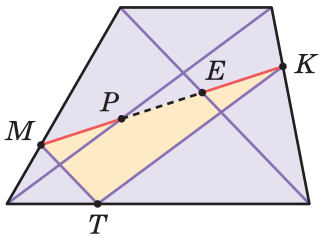
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 27



задача 29



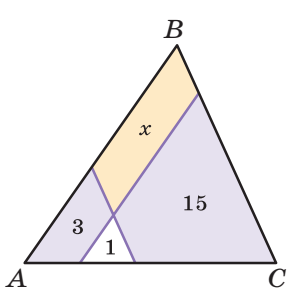
задача 31

27. ★★☆ Стороны треугольника равны 5, 5 и 6. В него вписали второй треугольник так, что все его стороны соответственно перпендикулярны сторонам исходного. Докажите, что эти треугольники подобны, и найдите коэффициент их подобия. (▸▸ рис.)

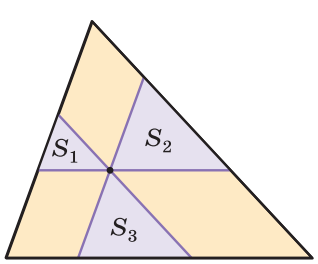
28. ★★☆ В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямыми углами A и B E — точка пересечения диагоналей, а F — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на боковую сторону AB. Докажите, что угол CFE равен углу DFE.

29. ★★☆ Периметр треугольника ABC равен 9. В треугольник вписана окружность, и к ней проведена касательная, параллельная стороне AB. Отрезок этой касательной, заключённый между сторонами AC и CB, равен 1. Найдите сторону AB. (▸▸ рис.)

30. ★★☆ Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, провели прямую, перпендикулярную биссектрисе угла A. Эта прямая пересекает стороны AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $4 \cdot BX \cdot CY = XY^2$.



задача 32



задача 33

31. ★★☆ На основании трапеции взяли произвольную точку T. Через неё провели две прямые параллельно диагоналям трапеции. Они пересекли боковые стороны трапеции в точках M и K. Отрезок MK пересекает диагонали трапеции в точках P и E. Докажите, что $MP = EK$. (▸▸ рис.)

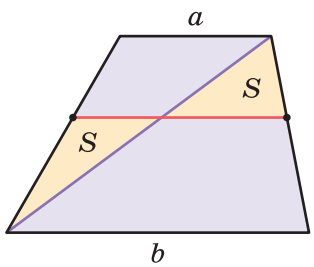
32. ★★☆ Параллельно двум сторонам треугольника ABC провели две прямые. Они разбили треугольник на две трапеции, треугольник и параллелограмм. Цифрами обозначены площади трапеций и треугольника. Найдите площадь параллелограмма. (▸▸ рис.)

33. ★★☆ Через точку внутри треугольника проведены три прямые параллельно всем его сторонам. Найдите площадь исходного треугольника, если площади отмеченных треугольников на рисунке равны S_1, S_2 и S_3. (▸▸ рис.)

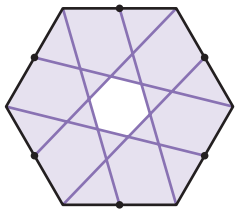
34. ★★★ Отрезок, параллельный основаниям трапеции, проведён так, что закрашенные на рисунке треугольники равновелики. Найдите длину проведённого отрезка, если основания трапеции равны a и b. (▸▸ рис.)

35. ★★★ Вершины правильного шестиугольника соединили с серединами его сторон так, как показано на рисунке. Какую часть площади всего шести-

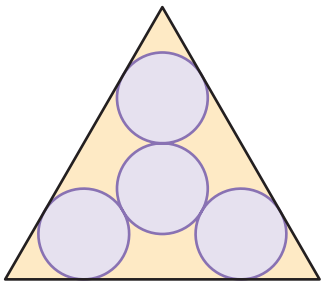
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 34



задача 35



задача 36

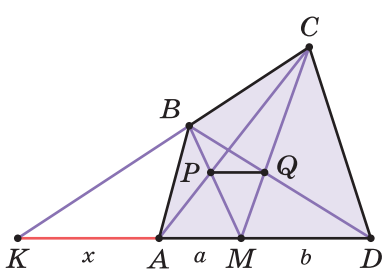
угольника составляет незакрашенная фигура в центре? (рис.)

36. ★★★ Четыре равные окружности расположены так, что три из них вписаны в углы треугольника, а четвёртая касается остальных. Найдите их радиус, если радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника равны r и R. (рис.)

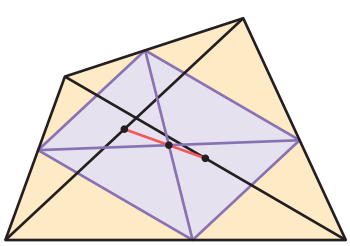
37. ★★★ Продолжения сторон BC и AD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Некоторую точку M на его стороне AD соединили отрезками с вершинами B и C. Проведённые отрезки пересекают диагонали четырёхугольника в точках P и Q. Оказалось, что прямая PQ параллельна AD. Найдите AK, если $AM = a$, $MD = b$. (рис.)

38. ★★★ На каждой стороне четырёхугольника взяли по точке так, что эти четыре точки образовали параллелограмм, стороны которого параллельны диагоналям исходного четырёхугольника. Докажите, что центр параллелограмма лежит на отрезке, соединяющем середины диагоналей четырёхугольника. (рис.)

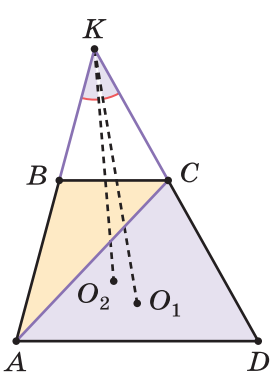
39. ★★★ Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K. Пусть точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABC и ACD. Докажите, что $\angle AKO_1 = \angle DKO_2$. (рис.)



задача 37

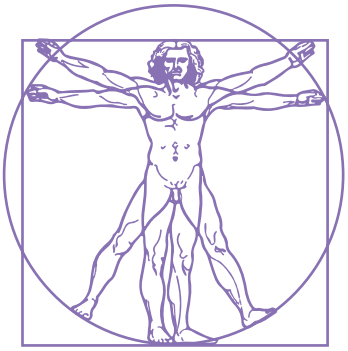


задача 38



задача 39

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Гомотетия

Благодаря современным технологиям сейчас каждый из вас знает, как увеличивать или уменьшать изображение на экране компьютера: вы наводите курсор на то место, которое нужно приблизить, нажимаете клавишу *Ctrl* и крутите колёсико «мыши». Тогда точка под курсором остаётся на месте, а все остальные точки изображения удаляются от неё в одинаковое число раз. То же самое происходит, когда вы пользуетесь цифровыми картами на своих смартфонах или планшетах (рис. 58). Чтобы изменить масштаб карты, нужно два раза нажать на нужную вам точку карты — тогда карта от выбранной точки равномерно растягивается во все стороны и можно подробно разглядеть нужное место. При таком равномерном растяжении любое изображение, фотография или карта сохраняют все свои пропорции.



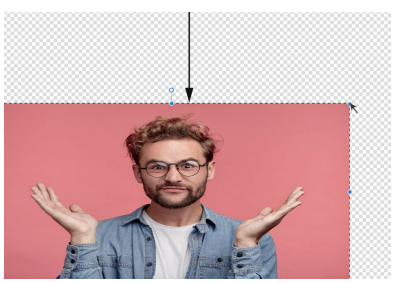
Рис. 58

Подобное «растягивание» картинки на экране является примером гомотетии — преобразования геометрических фигур, при котором они увеличиваются или уменьшаются в размерах, сохраняя пропорции между своими частями. Слово «гомотетия» происходит от греческих слов ὅμος (одинаковый) и θετός (расположенный). То есть само название этого преобразования отражает его главное свойство: оно меняет размеры геометрической фигуры, сохраняя форму и взаимное расположение её частей.

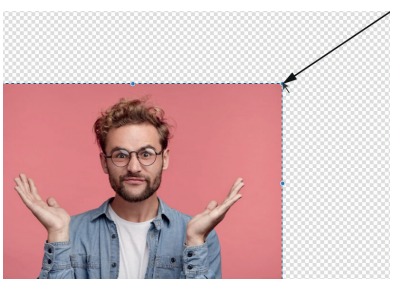
В какой точке находится центр гомотетии на последней фотографии?

При гомотетии изображение на экране растягивается во все стороны от рассматриваемой точки равномерно. Если мы

Рис. 59







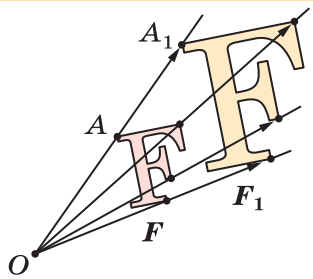
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

будем растягивать (или сжимать) фотографию только по горизонтали или только по вертикали, то она исказится, то есть потеряет свои изначальные пропорции (рис. 59).

Если же прямоугольник с фотографией курсором «потянуть» за угол, то она растянется равномерно и без искажений. И как раз в этом случае компьютерная программа совершит гомотетию с положительным коэффициентом относительно некоторой точки — центра растяжения. Попробуйте догадаться, где находится этот центр. А мы дадим определение гомотетии.

Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $k > 0$ называется преобразование, которое каждую точку A плоскости переводит в такую точку A_1 на луче $[OA)$, что $OA_1 = k \cdot OA$.

Точку O называют центром гомотетии, а точку A_1 — **образом** точки A при гомотетии.
Если при гомотетии фигура $\boldsymbol{F}$ переходит в фигуру $\boldsymbol{F_1}$, то их называют **гомотетичными**.



$OA_1 = k \cdot OA$ $(k > 0)$

УПРАЖНЕНИЕ

27. Перенесите рисунок в тетрадь и постройте образ фигуры F, изображённой на клетчатой бумаге (рис. 60) при гомотетии с центром в точке O и коэффициентами а) $k = 2$; б) $k = 0{,}5$.

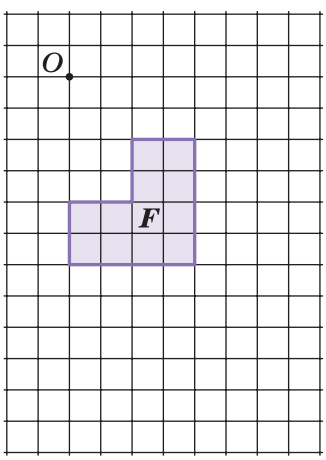


Рис. 60

По определению, гомотетия должна «растягивать» или «сжимать» геометрические фигуры пропорционально, то есть сохранять взаимное положение всех их частей. Это означает, что при гомотетии фигура должна переходить в подобную ей фигуру. В этом и состоит теорема о гомотетии.

ТЕОРЕМА

При гомотетии фигура переходит в подобную ей фигуру.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть гомотетия с центром O и коэффициентом $k > 0$ переводит некоторую фигуру $\boldsymbol{F}$ в фигуру $\boldsymbol{F_1}$. Возьмём любые две точки A и B фигуры F и рассмотрим их образы A_1 и B_1 при этой гомотетии. Мы разберём случай, когда центр O гомотетии не лежит на прямой AB (рис. 61). Тогда образуются треугольники AOB и A_1OB_1 с общим углом при вершине O.

По определению гомотетии должны выполняться такие равенства:

$$OA_1 = k \cdot OA,\ OB_1 = k \cdot OB.$$

Из них следует, что $OA_1 : OB_1 = OA : OB$. То есть отношения сторон треугольников AOB и A_1OB_1, между которыми лежит их общий угол, равны. Следовательно, эти треугольники подобны по второму признаку. Коэффициент подобия этих треугольников равен отношению их соответственных сторон, поэтому

$$A_1B_1 : AB = OA_1 : OA = k.$$

Откуда $A_1B_1 = k \cdot AB$. Значит, при гомотетии, переводящей фигуру F в фигуру F_1, расстояния между любыми двумя точками A и B фигуры F «умножаются» на одно и то же число k. Следовательно, фигуры F и F_1 подобны по определению.

В случае когда точки O, A и B лежат на одной прямой, легко проверить, что $A_1B_1 = k \cdot AB$. Разберите этот случай самостоятельно.

Что и требовалось доказать.

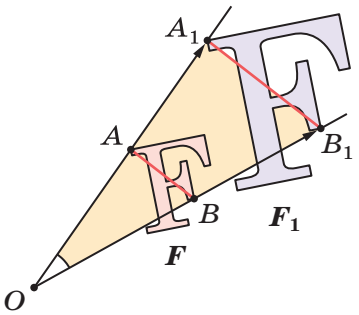


Рис. 61

Из доказанной теоремы следует, что при гомотетии отношение отрезков между точками фигуры не меняется.

УПРАЖНЕНИЕ

28. На клетчатой бумаге показаны две гомотетичные фигуры в форме букв T (рис. 62). Перенесите рисунок в тетрадь и постройте центр гомотетии, которая переводит одну из них в другую.

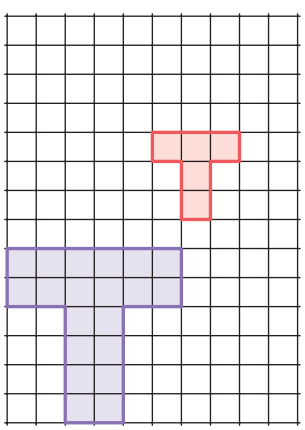


Рис. 62

Поскольку гомотетия переводит фигуры в подобные им фигуры, то отрезки она переводит в отрезки, а прямые — в прямые. Но в отличие от произвольного расположения подобных фигур, при гомотетии соответственные прямые и отрезки будут параллельными (либо окажутся на одной прямой). Давайте запишем это как свойство гомотетии.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

СВОЙСТВО ГОМОТЕТИИ

Гомотетия переводит прямую, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную ей прямую.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть прямая не проходит через центр O гомотетии, которая точки A и B данной прямой переводит в точки A_1 и B_1. При гомотетии фигура переходит в подобную ей фигуру, поэтому прямая AB должна перейти в прямую A_1B_1 (рис. 63). В предыдущей теореме мы доказали, что треугольники AOB и A_1OB_1 подобны. Значит, равны их соответственные углы при вершинах A и A_1. Поскольку два этих угла соответственные при секущей AA_1, то прямые AB и A_1B_1 должны быть параллельны по признаку. Значит, при гомотетии прямая, не проходящая через центр гомотетии, переходит в параллельную прямую.

Что и требовалось доказать.

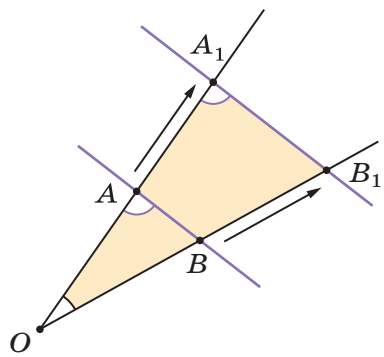


Рис. 63

Гомотетия с отрицательным коэффициентом

Одним из далёких предшественников современных фотоаппаратов была камера-обскура. Первые камеры-обскуры представляли собой затемнённые помещения (или большие ящики) с маленьким отверстием в одной из стен (рис. 64). В яркий солнечный день на стене, противоположной отверстию, в такой тёмной комнате можно наблюдать перевёрнутые изображения предметов. Подобным образом в XI веке арабский учёный Ибн ал-Хайсам из Басры пользовался специальными палатками для наблюдений за затмениями Солнца.

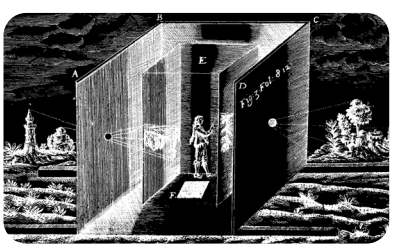


Рис. 64
Камера-обскура

В Средние века камеру-обскуру неоднократно использовали для астрономических наблюдений, позже — для зарисовок с натуры. К ней прибегали многие выдающиеся художники, такие как Леонардо да Винчи и Вермеер. Леонардо даже описал её в своём «Трактате о живописи». Почему же они ею пользовались? Всё очень просто: камера-обскура давала на плоскости правдоподобное изображение предметов, сохраняла их пропорции. А происходило это потому, что она является ещё одним примером гомотетии. Правда, коэффициент этой гомотетии будет отрицательным (рис. 65). Давайте запишем её геометрическое определение.

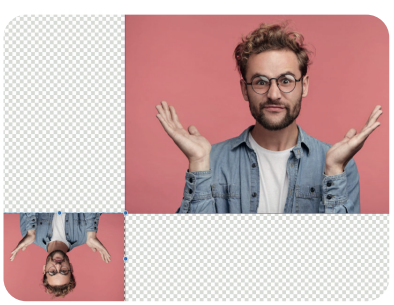
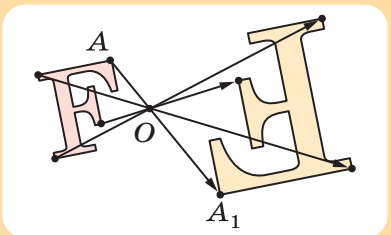


Рис. 65

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $k < 0$ называется такое преобразование, которое каждую точку A плоскости переводит в точку A_1, лежащую на луче, дополнительном к лучу OA, и такую, что $OA_1 = (-k) \cdot OA$.



Почему коэффициент k такой гомотетии решили обозначать отрицательным числом? Объяснить это можно так. Подобно тому как знак «−» возле числа на числовой прямой показывает, что число перенесли по другую сторону от нуля, коэффициент $k < 0$ гомотетии показывает, что образ точки A находится по другую сторону от центра O гомотетии.

Гомотетия с отрицательным коэффициентом обладает теми же свойствами, что и гомотетия с коэффициентом $k > 0$. Мы предлагаем вам доказать это в качестве упражнений.

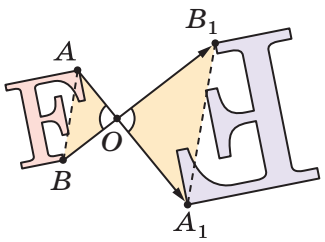


Рис. 66

УПРАЖНЕНИЯ

29. Пользуясь рисунком 66, докажите, что гомотетия с коэффициентом $k < 0$:
а) переводит фигуру в подобную ей фигуру;
б) прямую, не проходящую через центр гомотетии, переводит в параллельную прямую.

30. На клетчатой бумаге показаны фигура в форме буквы T и точка O (рис. 67). Перерисуйте их в свою тетрадь и постройте фигуру, в которую перейдёт данная фигура при гомотетии относительно точки O при $k = -2$.

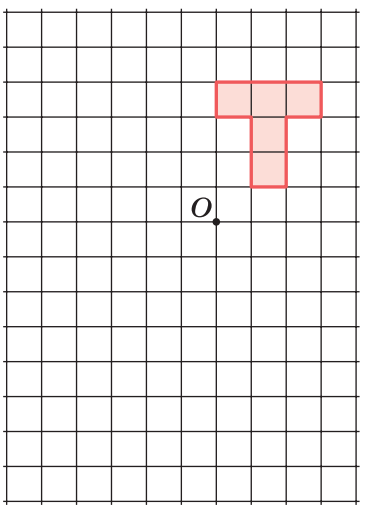


Рис. 67

31. На клетчатой бумаге показаны два параллельных отрезка (рис. 68). Нарисуйте их в своей тетради и постройте центр гомотетии, которая один из этих отрезков переводит в другой. Сколько можно построить таких центров? Чему равны коэффициенты каждой из этих гомотетий?

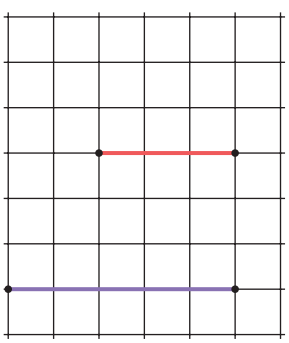


Рис. 68

Гомотетия двух отрезков

Как должны быть расположены два отрезка, чтобы их можно было гомотетией перевести друг в друга? По свойству гомотетии такие отрезки либо лежат на одной прямой, либо должны быть параллельны. Мы разберём случай, когда два данных отрезка AB и CD лежат на параллельных

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

прямых и не равны друг другу (рис. 69) — в этом случае их можно считать основаниями одной трапеции. При гомотетии концы отрезка переходят в концы другого отрезка, поэтому возможны всего два случая.

В первом случае точка A при гомотетии перейдёт в точку C, а точка B — в точку D. Тогда центр O_1 такой гомотетии будет находиться на пересечении прямых AC и BD (рис. 70). Можно сказать, что в этом случае центр гомотетии окажется точкой схода продолжений боковых сторон трапеции, основаниями которой служат данные отрезки AB и CD. Коэффициент k_1 этой гомотетии будет положительным и равным отношению длин этих отрезков: $k_1 = AB : CD$.

Во втором случае при гомотетии точка A перейдёт в точку D, а точка B — в точку C. Тогда центр O_2 гомотетии будет лежать на пересечении прямых AD и BC, то есть он будет находиться в точке пересечения диагоналей трапеции с основаниями AB и CD (рис. 71). Коэффициент k_2 этой гомотетии в таком случае окажется отрицательным, а его модуль будет также равен отношению длин данных отрезков AB и CD, то есть $k_2 = -k_1$.

Итак, существуют две гомотетии, которые переводят друг в друга два параллельных и неравных отрезка. Поэтому с трапецией естественным образом связано две гомотетии: одна — с центром в точке пересечения её диагоналей, а другая — с центром в точке пересечения продолжений боковых сторон (рис. 72). Отметим, что модули коэффициентов обеих гомотетий равны отношению длин оснований трапеции $AB : CD$.

Стоит сказать, что каждая из рассмотренных нами гомотетий прямо связана со стандартным положением подобных треугольников. Треугольники, которые составляют «пирамиду», переводятся друг в друга гомотетией с положительным коэффициентом, а треугольники, образующие «песочные часы», — с отрицательным. То есть треугольники, составляющие эти стандартные положения, гомотетичны друг другу.

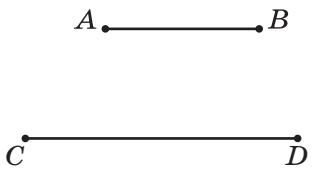


Рис. 69

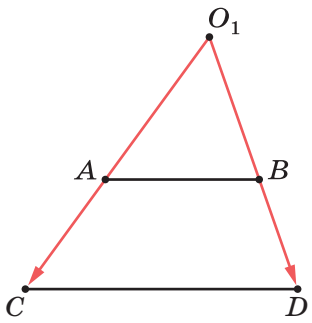


Рис. 70

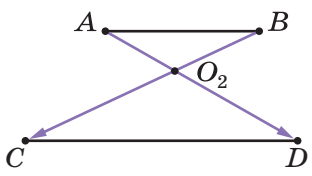


Рис. 71

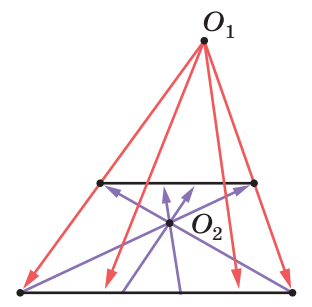


Рис. 72

УПРАЖНЕНИЯ

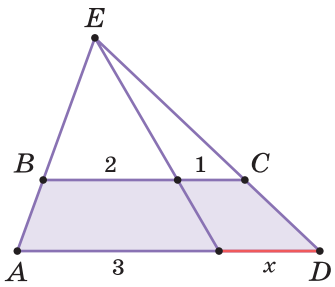
32. Сколько существует гомотетий, которые переводят среднюю линию треугольника в его сторону?

33. В какие точки перейдут вершины треугольника при гомотетии с центром в точке пересечения его медиан и коэффициентом $k = -0{,}5$?

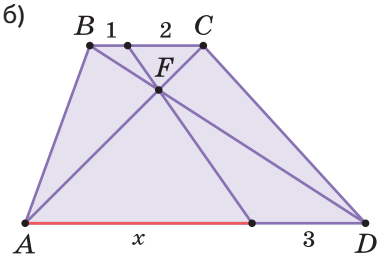
34. В каком случае два параллельных отрезка имеют единственный центр гомотетии? Чему равен её коэффициент в этом случае?

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

а)



б)



в)

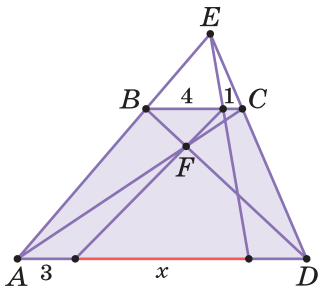


Рис. 73

35. С помощью гомотетии докажите замечательное свойство трапеции.

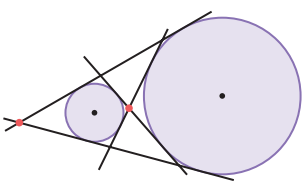
36. На рисунке 73а–в $ABCD$ — трапеция, точка E является точкой пересечения прямых AB и CD, а точка F — точкой пересечения диагоналей AC и BD. На каждом из рисунков найдите длины отрезков, обозначенных буквой x.

Гомотетия двух окружностей

Поскольку гомотетия переводит любую фигуру в подобную ей фигуру, то окружность она переводит в окружность. Оказывается, что для двух окружностей справедливо такое же утверждение, как и для двух отрезков. Сформулировать его можно следующим образом.

ТЕОРЕМА О ГОМОТЕТИИ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

Существует ровно две гомотетии, которые переводят две неравные окружности с различными центрами друг в друга.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим случай, когда окружности не пересекаются и ни одна из них не содержится в другой. Тогда к ним можно провести 4 общие касательные: две внутренние и две внешние. Обозначим окружности как ω_1 и ω_2, их центры как O_1 и O_2, а радиусы как r_1 и r_2 соответственно. Точку пересече-

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

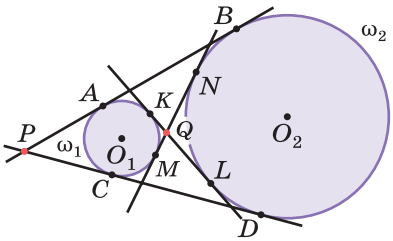


Рис. 74

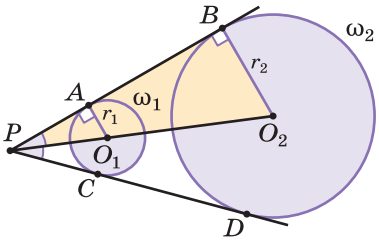


Рис. 75

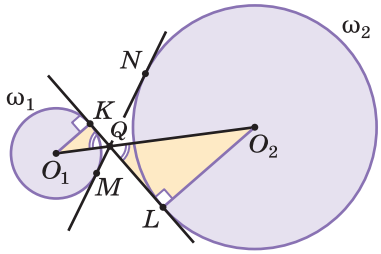


Рис. 76

ния внешних касательных AB и CD обозначим буквой P, а точку пересечения внутренних касательных KL и MN — буквой Q (рис. 74). Покажем, что точки P и Q и будут являться центрами искомых гомотетий.

Так как PA и PC — касательные к окружностям ω_1 и ω_2, то центры O_1 и O_2 этих окружностей лежат на биссектрисе угла APC. Радиусы O_1A и O_2B перпендикулярны прямой AB по теореме о касательной (рис. 75). Значит, треугольники PAO_1 и PBO_2 подобны по двум углам. Коэффициент их подобия равен отношению радиусов окружностей $r_1 : r_2$.

Рассмотрим гомотетию с центром в точке P и коэффициентом $k = \dfrac{r_2}{r_1}$. Центр окружности O_1 тогда перейдёт в центр O_2, точка A перейдёт в точку B. Значит, окружность ω_1 перейдёт в окружность ω_2, что и требовалось доказать.

Так же легко доказать, что подобны треугольники QO_1K и QO_2L (рис. 76). Отсюда следует, что гомотетия с центром в точке Q и коэффициентом $k = -\dfrac{r_2}{r_1}$ будет переводить окружность ω_1 в ω_2.

Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

37. Докажите теорему о гомотетии двух окружностей для случая, когда окружности пересекаются или одна лежит внутри другой.

38. Докажите, что если окружности касаются, то точка касания является одним из центров гомотетий, переводящих одну окружность в другую.

39. Точки P и Q являются центрами гомотетий, переводящих одну окружность в другую. Докажите, что прямые l_1 и l_2 на рисунке 77 а–б параллельны.

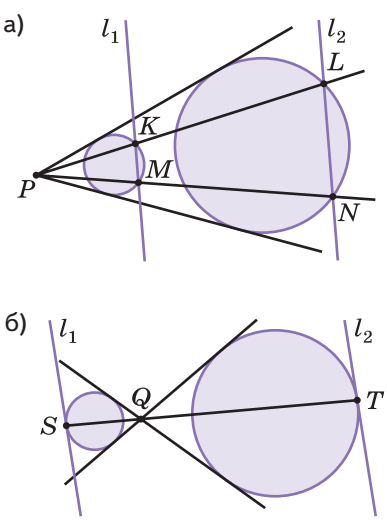


Рис. 77

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

§5 Теоремы Чевы и Менелая

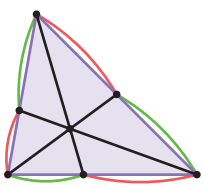
В этом параграфе мы с вами познакомимся с двумя важными фактами геометрии треугольника: теоремами Чевы и Менелая. Обе эти теоремы являются эффективными рабочими инструментами: многие довольно сложные задачи с их помощью можно решить в одну строчку! Каждая из этих теорем является своеобразной изюминкой геометрии и очень красива. А простоту связанных с ними конструкций вы можете видеть на рисунках (рис. 1).

Теоремы Чевы и Менелая хороши тем, что их очень легко применять. Над доказательством этих теорем нам придётся немного потрудиться, а вот для их применения почти ничего не требуется! В этом смысле они похожи на смартфон: внутри устроены сложно, зато ими просто пользоваться.

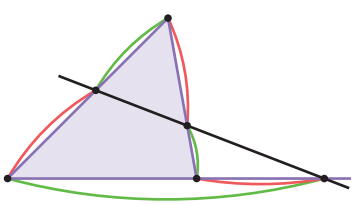
С помощью теоремы Чевы мы с вами без труда докажем, что все медианы треугольника или все его биссектрисы пересекаются в одной точке. Раньше для доказательства этих фактов нам приходилось изобретать специальные способы. По той же теореме в одну строчку мы докажем и существование *точки Жергонна* для треугольника (рис. 2). Посмотрите на рисунок: данное утверждение кажется совершенно не очевидным!

Так же легко при решении задач применять и теорему Менелая. Ведь для проверки того, что три данные точки на сторонах треугольника лежат на одной прямой, достаточно выполнения всего одного равенства! Например, с помощью этой теоремы мы с вами докажем, что основания двух биссектрис неравнобедренного треугольника всегда лежат на одной прямой с основанием биссектрисы внешнего угла этого треугольника при его третьей вершине (рис. 3).

Прежде чем применять эти две замечательные теоремы, нужно их доказать. И для этого мы сначала познакомимся с теми стандартными дополнительными построениями, которые помогут нам это сделать. Они представляют ценность и сами по себе, поскольку помогают решать много других задач. А заключаться они будут в том, что на чертеже условия задачи мы будем строить дополнитель-



Теорема Чевы



Теорема Менелая

Рис. 1
Произведение длин отрезков, отмеченных красными дужками, равно произведению длин отрезков, отмеченных зелёными дужками.

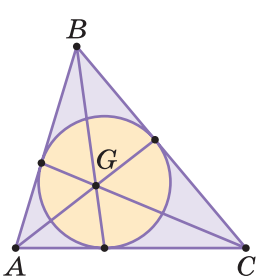


Рис. 2
Три прямые, соединяющие точки касания вписанной в треугольник окружности с его противоположными вершинами, пересекаются в одной точке, называемой точкой Жергонна.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ные параллельные прямые и некоторые отрезки продлевать до пересечения с этими прямыми. Таким образом, мы сведём каждую такую задачу к рассмотрению подобных треугольников.

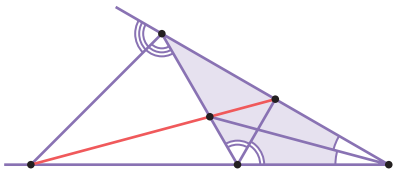


Рис. 3
Основания двух биссектрис треугольника лежат на одной прямой с основанием биссектрисы его внешнего угла при третьей вершине.

Дополнительные построения, связанные с подобием

В предыдущем параграфе на чертежах мы искали подобные треугольники и записывали пропорции для их соответственных сторон. Так с помощью подобия мы получали отношения нужных отрезков.

Увидеть подобные треугольники на чертеже задачи нам помогали стандартные положения. Чаще всего они были связаны с параллельными прямыми и секущими. По ассоциации мы даже дали им названия «пирамида» и «песочные часы». Однако есть целый класс задач, в которых нужно найти отношение отрезков, но нет параллельных прямых. Вот для решения этих задач и нужны стандартные дополнительные построения. Если на чертеже такой задачи провести прямую, параллельную стороне треугольника, а потом пересечь её с другими данными прямыми, то на нём сразу появятся подобные треугольники и стандартные положения. Давайте посмотрим, как это можно сделать, на нескольких примерах.

ПРИМЕР 1. ★☆☆ На одной стороне угла с вершиной O выбраны точки A и B, на другой — C и D, причём $OA = AB$, $CD = 2OC$. Отрезки AD и BC пересекаются в точке P (рис. 4). Найдите отношение $AP : PD$.

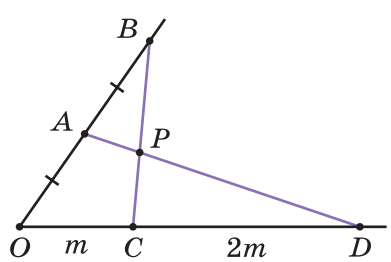


Рис. 4

РЕШЕНИЕ

Заметим, что на рисунке нет параллельных прямых и стандартных положений подобных треугольников. Давайте сделаем одно дополнительное построение и сразу получим их.

Проведём через точку A прямую, параллельную прямой BC, и пересечём её с другой стороной угла в точке Q. Тогда образуются сразу две «пирамиды» из треугольников с вершинами в точках O и D: это пара треугольников OAQ и OBC и вторая пара треугольников DAQ и DPC (рис. 5).

По условию нам дано, что $OC : CD = 1 : 2$, поэтому на чертеже длины отрезков OC и CD мы обозначили соответственно как m и $2m$.

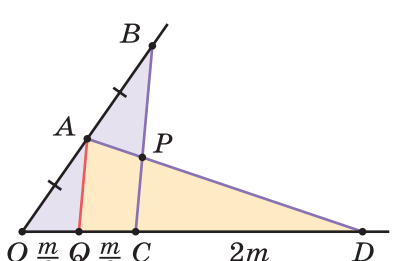


Рис. 5

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Посмотрите на положение «пирамиды» внутри угла BOC. Прямые AQ и BC параллельны, и точка Q по теореме Фалеса должна делить отрезок OC пополам. Поэтому $OQ = QC = \frac{m}{2}$.

А теперь посмотрите на вторую «пирамиду» внутри угла ADQ. По теореме о пропорциональных отрезках для тех же параллельных прямых AQ и PC можно написать $AP : PD = QC : CD = \frac{m}{2} : 2m = 1 : 4$.

Ответ: 1 : 4.

Ключом к решению разобранной задачи было проведение параллельной прямой к одной из прямых на данном рисунке. За счёт неё мы смогли «перебросить», или «спроектировать», отношение отрезков с одной прямой на другую, а потом ещё и на третью. Но как догадаться, для какой прямой на чертеже нужно проводить параллельную прямую? Здесь нужен некоторый опыт, поэтому мы предлагаем вам потренироваться делать это дополнительное построение в следующих упражнениях.

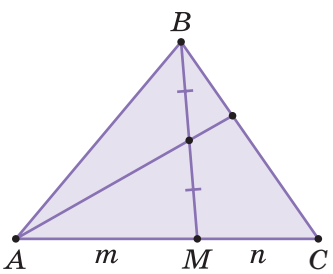


Рис. 6

УПРАЖНЕНИЯ

1. На основании AC треугольника ABC взяли такую точку M, что $AM : CM = m : n$. Через вершину A и середину отрезка BM провели прямую. В каком отношении эта прямая делит сторону BC (рис. 6)?

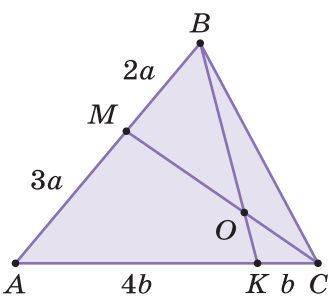


Рис. 7

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяли точки M и K так, что $AM : BM = 3 : 2$, $AK : CK = 4 : 1$. Отрезки BK и CM пересекаются в точке O (рис. 7). Найдите $BO : OK$.

3. На стороне BC треугольника ABC взяли точку K так, что $BK : CK = 1 : 2$. Медиана CM пересекает отрезок AK в точке O. Прямая BO пересекает сторону AC в точке E. Найдите $BO : OE$ (рис. 8).

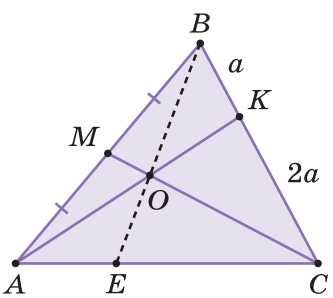


Рис. 8

4. Прямая не параллельна сторонам треугольника и делит две его стороны в отношениях 1 : 3 и 2 : 5. В каком отношении эта прямая делит медиану данного треугольника, проведённую к его третьей стороне (рис. 9)?

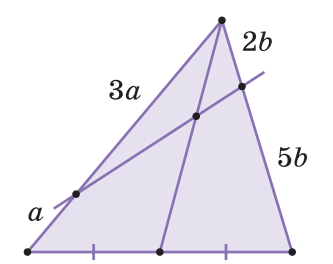


Рис. 9

Упражнения 2–4 удобно решать, если провести дополнительную прямую l через вершину B треугольника ABC параллельно его стороне AC. Продлив отрезки CM и AK до пересечения с прямой l, вы получите пары подобных треугольников в стандартном положении «песочные часы». Из них легко найти нужные отношения.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Иногда на чертеже задачи уже есть параллельные прямые, но нет подобных треугольников. Тогда в качестве дополнительного построения надо просто продлить те или иные отрезки до пересечения с этими параллельными прямыми. Такой приём часто помогает в задачах с трапециями, параллелограммами или правильными шестиугольниками. Мы разберём его на одном примере.

ПРИМЕР 2. ★★☆ Точка M — середина стороны CD правильного шестиугольника $ABCDEF$. В каком отношении отрезок MF делится диагональю AE шестиугольника (рис. 10)?

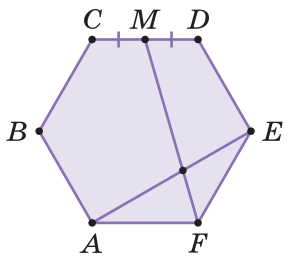


Рис. 10

РЕШЕНИЕ

Обозначим точку пересечения отрезков MF и AE буквой K. Для того чтобы найти отношение отрезков FK и KM, нужно увидеть на рисунке подобные треугольники, сторонами которых являются эти отрезки. Поскольку противоположные стороны AF и CD правильного шестиугольника параллельны, то пара таких треугольников, скорее всего, образует стандартное положение.

Один из них легко заметить: это треугольник AKF. А чтобы получить второй треугольник, давайте продлим прямую AK до пересечения с прямой CD в точке L (рис. 11). Тогда мы сразу получим подобные треугольники AKF и LKM, которые образуют стандартное положение «песочные часы». Поэтому можно написать пропорцию

$$FK : KM = AF : LM.$$

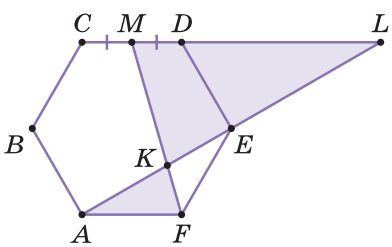


Рис. 11

Для того чтобы найти последнее отношение в этой пропорции, давайте продлим отрезок FE за точку E до пересечения с той же прямой CD в точке N (рис. 12). Тогда мы получим треугольник DEN, который будет равносторонним, поскольку два его угла при вершинах D и E смежные с углами правильного шестиугольника и равны $60°$. Значит, отрезки EN и DN равны стороне шестиугольника.

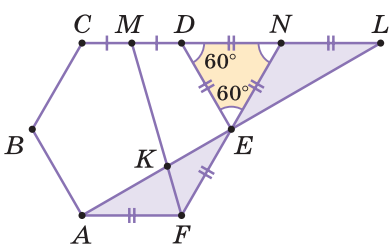


Рис. 12

Посмотрите теперь на треугольники AEF и LEN. Они тоже образуют стандартное положение «песочные часы» при параллельных прямых AF и CD. Так как их соответственные стороны FE и EN равны друг другу, то эти треугольники подобны с коэффициентом 1, то есть они равны. Значит, отрезок NL тоже равен стороне шестиугольника.

Давайте обозначим длину стороны шестиугольника через a (рис. 13). Из $MD = \frac{a}{2}$ и $DL = 2a$ и подобия треугольников AKF и LKM получим нужное нам отношение:

$$FK : KM = AF : LM = a : \left(\frac{a}{2} + a + a\right) = 2 : 5.$$

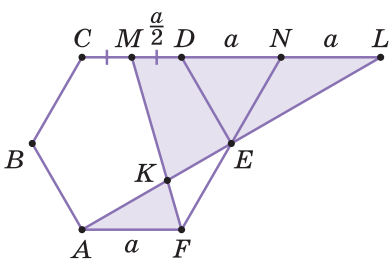


Рис. 13

Ответ: 2 : 5.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

УПРАЖНЕНИЯ

5. Две вершины параллелограмма соединили с серединами его сторон так, как показано на рисунке 14. Полученные два отрезка пересекаются в точке O. В каком отношении точка O делит каждый из них?

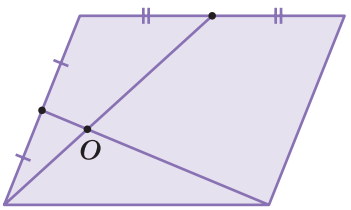


Рис. 14

6. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 5, точка E — середина её боковой стороны CD, точка O — середина отрезка AE (рис. 15). В каком отношении прямая DO делит сторону AB?

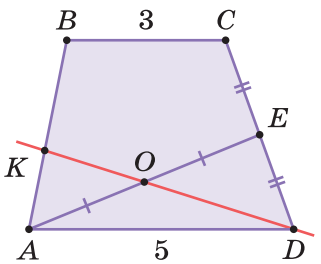


Рис. 15

Теорема Менелая

Как мы с вами видели, нахождение отношений отрезков во многих разобранных нами задачах было связано с дополнительными построениями. Нужные пропорции мы получали из подобных треугольников, а сами эти треугольники возникали после проведения параллельной прямой к одной из тех, которые есть на рисунке. Тогда естественно возникает вопрос: как в каждом конкретном случае можно догадаться, параллельно чему нужно проводить такую прямую? Обычно понимание этого приходит с опытом. Но не расстраивайтесь: для тех, кому сложно додуматься до таких построений, существуют готовые формулы — с их помощью можно сразу находить отношения нужных отрезков. Одну из таких формул нам даёт теорема Менелая.

Теорема Менелая связана с положением, когда прямая линия пересекает стороны треугольника. Из курса 7 класса вы наверняка помните: если прямая не проходит через вершину треугольника, то она либо вообще не пересекает его сторон, либо пересекает ровно две стороны (рис. 16). Теорема учитывает оба этих случая.

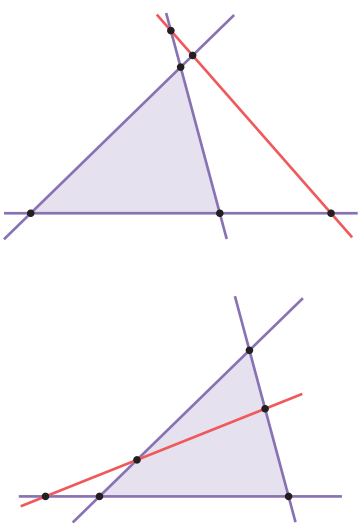
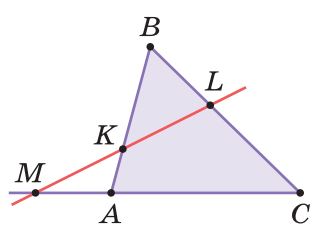


Рис. 16

ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ

Если прямая пересекает стороны или продолжения сторон AB, BC и AC треугольника ABC соответственно в точках K, L и M, то выполняется равенство $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$.



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Мы разберём случай, когда прямая пересекает две стороны треугольника и продолжение его третьей стороны. Пусть, например, прямая l пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках K и L, а продолжение его стороны AC в точке M. Сделаем дополнительное построение: опустим из вершин треугольника ABC на прямую l перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1 и обозначим их длины соответственно a, b и c (рис. 17).

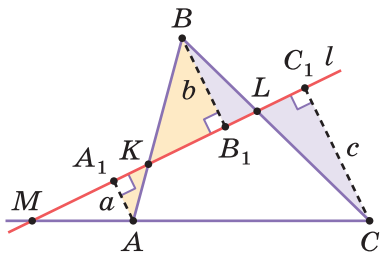


Рис. 17

На нашем рисунке сразу возникнет три пары подобных прямоугольных треугольников. Треугольники AA_1K и BB_1K образуют положение «песочные часы», как и треугольники BB_1L и CC_1L. А треугольники CC_1M и AA_1M образуют положение «пирамида» с вершиной в точке M. Из подобия трёх пар этих треугольников следует, что $AK : BK = a : b$, $BL : CL = b : c$, $CM : AM = c : a$.

Произведение правых частей этих трёх равенств равно произведению левых, поэтому

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1.$$

Случай, когда прямая пересекает только продолжения сторон треугольника ABC, докажите самостоятельно.

Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЕ

7. Докажите теорему для случая, когда прямая пересекает продолжения всех сторон треугольника (рис. 18).

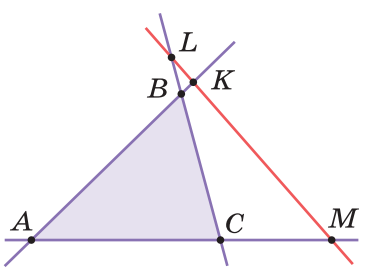


Рис. 18

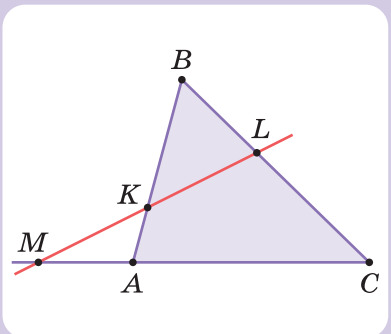
Обратная теорема Менелая

Как проверить, что три данные точки на рисунке лежат на одной прямой? Если эти точки соответственно лежат на трёх прямых, образующих треугольник, то проверить это можно по *обратной теореме Менелая*. Как можно сформулировать эту теорему? Мы уже доказали, что для трёх таких точек, лежащих на одной прямой, выполняется соотношение из теоремы Менелая. Значит, это условие необходимо. Но для того, чтобы выполнялось обратное утверждение, одного этого условия недостаточно. Нужно ещё добавить, что только одна из этих точек либо все они должны лежать на продолжении сторон треугольника. В этом нет ничего удивительного — ведь именно так расположены точки на наших рисунках, на которых прямая пересекает стороны треугольника.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ

Пусть точки K, L и M лежат соответственно на прямых AB, BC и AC, образующих треугольник ABC. Если две из них лежат на сторонах треугольника (либо не лежит ни одной) и выполняется равенство $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$, то точки K, L и M лежат на одной прямой.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Мы рассмотрим случай, когда K и L лежат на сторонах AB и BC треугольника, а точка M — на продолжении стороны AC. Давайте рассуждать от обратного: предположим, что три эти точки не лежат на одной прямой. Давайте тогда проведём прямую через точки M и L. Пусть она пересекает сторону AB треугольника в точке K_1, отличной от точки K (рис. 19).

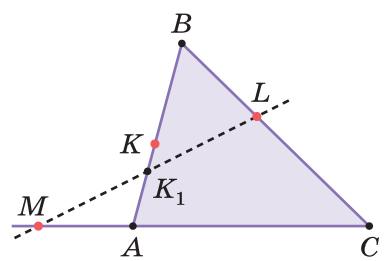


Рис. 19

Запишем теорему Менелая для точек M, L и K_1:

$$\frac{AK_1}{K_1B} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

А по условию нам дано, что $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$.

Если мы приравняем эти два равенства и сократим одинаковые множители, то получим

$$\frac{AK_1}{K_1B} = \frac{AK}{KB}.$$

Из этого следует, что точки K_1 и K делят отрезок AB в одинаковом отношении. Но это невозможно, поскольку из этих дробей у одной числитель больше, чем у другой, а знаменатель, наоборот, меньше. Мы получили противоречие. Значит, наше предположение было неверно и точки K, L и M лежат на одной прямой.

Другой случай, когда все точки K, L и M находятся на продолжениях сторон треугольника, мы предоставляем вам доказать в качестве упражнения.

Что и требовалось доказать.

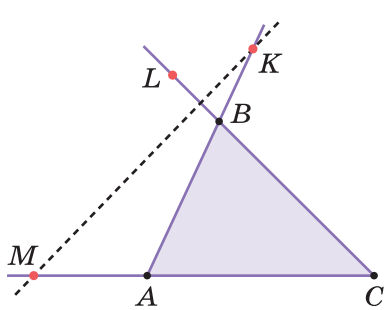


Рис. 20

УПРАЖНЕНИЕ

8. Докажите утверждение, обратное теореме Менелая, для случая, когда все три точки лежат на продолжениях сторон треугольника (рис. 20).

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Утверждение, аналогичное теореме Менелая, можно сформулировать для любого многоугольника и даже для любой замкнутой ломаной, которую пересекает прямая линия. Об этом вы можете прочитать в конце данного параграфа в разделе «Для тех, кто хочет знать больше».



Рис. 21
Менелай Александрийский

Впервые данная теорема была открыта греческим геометром Менелаем, работавшим в Александрии около 100 года нашей эры (рис. 21). Для чего ему понадобилась эта теорема? Оказывается, даже в те времена она имела вполне практическое применение в геодезии и астрономии.

Дело в том, что с помощью перспективы или центральной проекции Менелай перенёс свою теорему на сферу. А ведь поверхность нашей планеты с хорошим приближением можно считать сферой. Получается, что теорема Менелая позволяла проверить, когда три точки на сфере лежат на одной сферической «прямой». И это уже имело существенное значение для навигации и проведения расчётов на земном шаре.

Применения теоремы Менелая

В курсе геометрии используют как прямую, так и обратную теоремы Менелая. Первую используют для того, чтобы находить отношения отрезков, вторую — для доказательства того, что три данные точки на рисунке лежат на одной прямой. Давайте посмотрим, как это можно сделать, на следующем примере.

ПРИМЕР 3. ★☆☆ Докажите, что основания двух биссектрис треугольника лежат на одной прямой с основанием биссектрисы внешнего угла этого треугольника при его третьей вершине.

РЕШЕНИЕ

Пусть AK и CL — биссектрисы внутренних углов треугольника ABC, а BM — биссектриса внешнего угла (рис. 22). Докажем, что точки K, L, M лежат на одной прямой. Заметим, что K и L лежат на сторонах исходного треугольника ABC, а точка M — на продолжении его третьей стороны. Давайте проверим выполнение условия обратной теоремы Менелая для этих трёх точек.

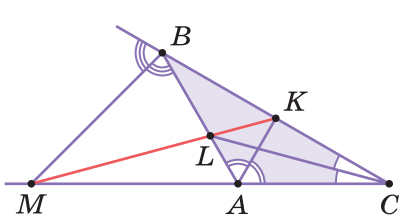


Рис. 22

Напомним свойство биссектрисы треугольника: биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам. Почти такое же

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

свойство справедливо и для биссектрисы внешнего угла треугольника. Например, для биссектрисы BM внешнего угла треугольника ABC при его вершине B мы получим такое соотношение: $AM : CM = AB : BC$. Используя это свойство для биссектрис AK, BM и CL, выразим нужные нам отношения отрезков через стороны треугольника ABC:

$$\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{BC}, \frac{BK}{KC} = \frac{BA}{AC}, \frac{CM}{MA} = \frac{CB}{BA}.$$

Перемножая эти равенства, мы получаем нужное нам тождество: $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BA}{AC} \cdot \frac{CB}{BA} = 1$.

Поэтому по обратной теореме Менелая точки K, L и M лежат на одной прямой.

Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

9. Докажите, что основания биссектрис трёх внешних углов неравнобедренного треугольника лежат на одной прямой (рис. 23).

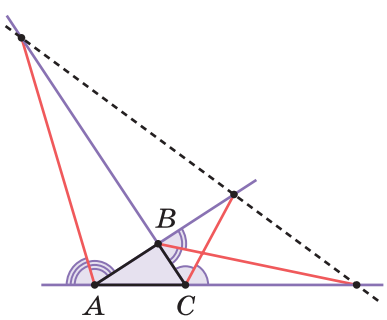


Рис. 23

10. Найдите длину отрезка, обозначенного буквой x, на рисунках 24 и 25.

11. Сторону AC треугольника ABC продлили за точку A и выбрали на ней точку D так, что $2AC = 3AD$. В каком отношении прямая, проходящая через точку D и середину стороны AB, делит сторону BC?

12. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны точки K и L соответственно так, что $AK : AB = 6 : 11$, $BL : BC = 2 : 5$. Найдите $AP : PL$, где P — точка пересечения прямых AL и CK.

13. Найдите, в каком отношении точка D делит отрезок BC на рисунках 26 и 27.

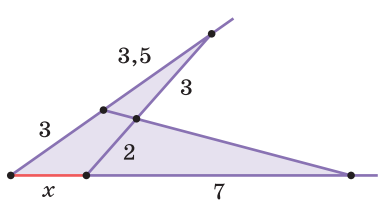


Рис. 24

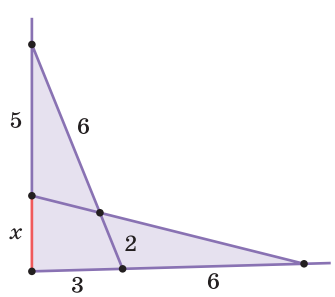


Рис. 25

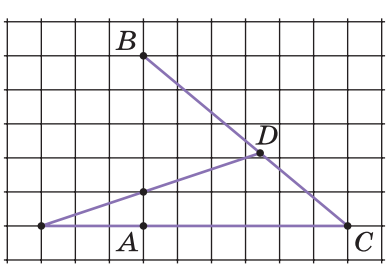


Рис. 26

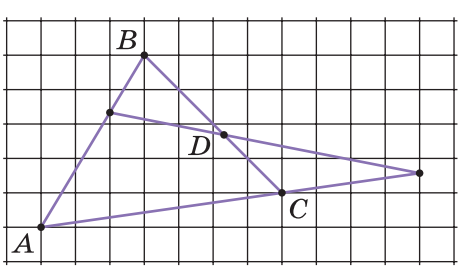


Рис. 27

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Отрезки, пересекающиеся внутри угла

Часто при решении задач на отношения отрезков возникает конфигурация, в которой две прямые пересекают стороны данного угла. Пусть, например, две прямые пересекают одну его сторону в точках A и B, а другую — в точках C и D. Обозначим вершину угла буквой O, а точку пересечения этих прямых буквой P (рис. 28). Предположим, что мы знаем длины всех отрезков с концами в этих точках на сторонах данного угла: $AB = a$, $OB = b$, $OC = c$ и $CD = d$. Как можно узнать отношение, в котором точка P делит отрезок AC?

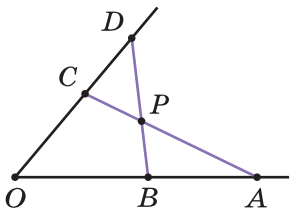


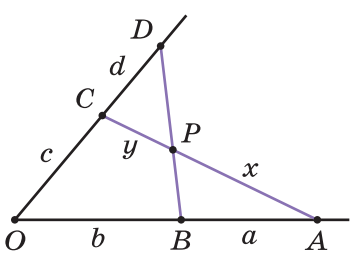
Рис. 28

Чтобы ответить на такой вопрос, можно сделать стандартное дополнительное построение (подумайте какое). А можно применить теорему Менелая для треугольника OAC и прямой BD. В любом случае вы получите соотношение, которую мы сформулируем как *теорему о шарнирах*.

ТЕОРЕМА О ШАРНИРАХ

Если на одной стороне угла с вершиной O взяты точки A и B, а на другой — C и D так, что длины отрезков AB, BO, OC и CD соответственно равны a, b, c, d, то отрезок AC делится отрезком BD в следующем отношении:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + 1\right).$$



Название теоремы происходит из следующей механической конструкции. Представим себе, что наш угол сделан из двух реек, закреплённых шарниром. Стороны угла можно поворачивать, меняя величину этого угла. На рейках в точках A, B, C и D вбиты гвозди, на которые натянуты эластичные резинки AC и BD, пересекающиеся в точке P. Если мы будем поворачивать рейки, длины отрезков AB, BO, OC и CD меняться не будут (рис. 29).

Значит, по этой теореме будет сохраняться отношение, в котором точка P делит резинку AC, хотя длина самой резинки будет меняться. Обратите внимание: для вычисления данного отношения не обязательно знать длины всех отрезков OB, BA, OC и CD — достаточно лишь знать отношения $a : b$ и $c : d$, в которых точки B и C делят отрезки OA и OD.

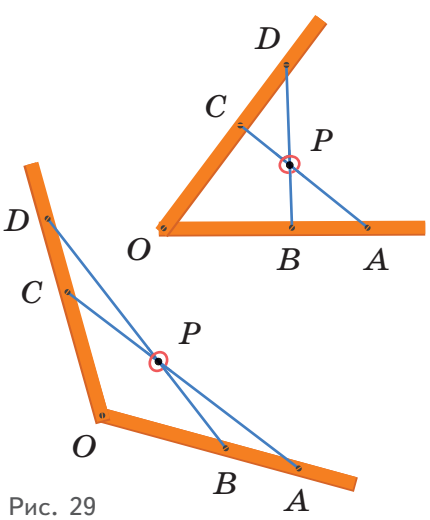


Рис. 29

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

УПРАЖНЕНИЯ

14. Докажите теорему о шарнирах с помощью теоремы Менелая.

15. На рисунках 30 и 31 изображён угол с двумя пересекающимися отрезками. Необходимо найти длину отрезка, обозначенного буквой x.

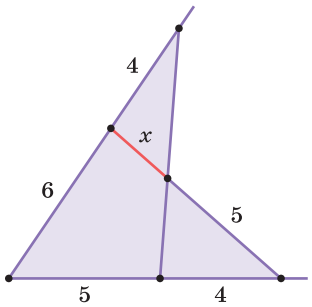


Рис. 30

16. В каком отношении делятся биссектрисы острых углов египетского треугольника точкой пересечения?

17. В треугольнике ABC проведена медиана AM и отрезок BK, соединяющий вершину B с произвольной точкой K на противоположной стороне. Рассмотрим отношения, в которых отрезок BK делит отрезки AM и AC, считая оба отношения от вершины A. Докажите, что одно из отношений в два раза больше другого.

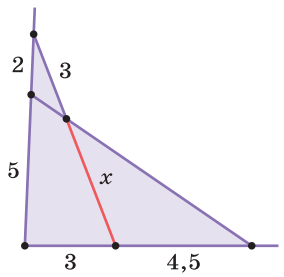
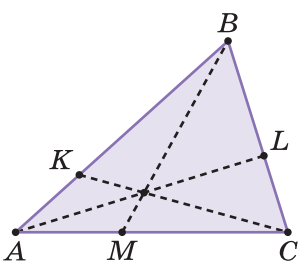


Рис. 31

Теорема Чевы

Мы с вами знаем, что когда прямая не проходит через вершины треугольника, то она либо не пересекает его сторон, либо пересекает только две стороны. Поэтому в теореме Менелая из точек M, K и L только две могут лежать на сторонах треугольника. А что будет, если все эти три точки будут лежать на его сторонах и при этом равенство из теоремы Менелая будет выполнено?

Легко догадаться, что в этом случае будет верно совсем другое утверждение. И в некотором смысле оно «противоположно» теореме Менелая. Если раньше три точки лежали на одной прямой, то теперь три прямые, проходящие через них, будут пересекаться в одной точке. Что же это за прямые? Они соединяют точки M, K и L на сторонах треугольника с его противоположными вершинами (рис. 32).



Для точек L, K, M выполнено равенство из теоремы Менелая

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

Рис. 32

Именно для таких прямых, пересекающихся в одной точке, и справедлива теорема Чевы. Благодаря этой теореме отрезки таких прямых, лежащие внутри треугольника, называют *чевианами*.

Формулировки теорем Чевы и Менелая очень похожи, но их разделяет почти две тысячи лет: Джованни Чева доказал свою теорему только в 1678 г. По профессии он был инженером и в доказательстве использовал соображения механики. Интересно также и то, что вместе с данной теоремой он заново открыл и доказал теорему Менелая, что изложил в своих научных трудах (рис. 33).

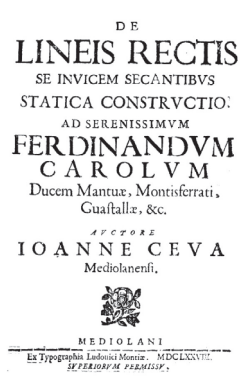

DE
LINEIS RECTIS
SE INVICEM SECANTIBVS
STATICA CONSTRVCTIO
AD SERENISSIMVM
FERDINANDVM
CAROLVM
Ducem Mantuæ, Montisferrati,
Guastallæ, &c.
AVCTORE
IOANNE CEVA
Mediolanensi.
MEDIOLANI

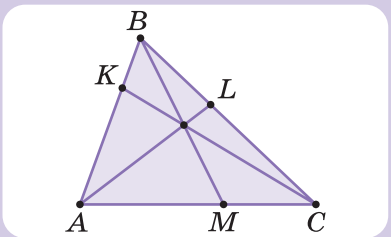
Рис. 33

Мы докажем теорему Чевы геометрически, применив два раза теорему Менелая. Но сначала её сформулируем.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ТЕОРЕМА ЧЕВЫ

Для того чтобы чевианы AL, BM и CK треугольника ABC пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Необходимость. Сначала мы докажем *необходимость*, или прямое утверждение: если чевианы AL, BM и CK пересекаются в одной точке P, то должно выполняться равенство $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$.

На чертеже этой теоремы много прямых, среди которых нет параллельных. Поэтому возникает мысль применить теорему Менелая к некоторым треугольникам на этом рисунке, чтобы получить отношения нужных отрезков. Рассмотрим треугольники ABM и CBM (рис. 34). Запишем теорему Менелая для треугольника ABM и прямой CK:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BP}{PM} \cdot \frac{MC}{CA} = 1.$$

А теперь применим теорему Менелая к треугольнику CBM и прямой AL (рис. 35): $\frac{MP}{PB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CA}{AM} = 1$.

Перемножив эти два равенства и сократив соответствующие множители, мы получим нужное тождество.

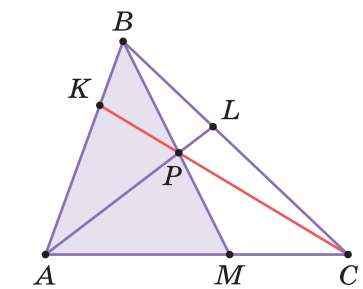


Рис. 34

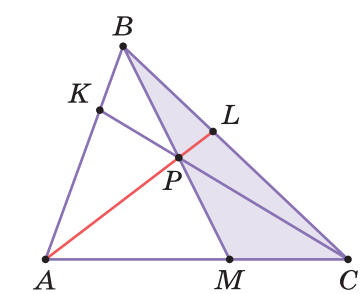


Рис. 35

Достаточность. Теперь докажем *достаточность*, или обратное утверждение: если для точек M, K и L на сторонах треугольника выполнено указанное в теореме равенство, то три соответствующие им чевианы пересекаются в одной точке.

Предположим, что для точек K, L и M на сторонах треугольника выполняется равенство, но чевианы AL, BM и CK в одной точке не пересекаются. Обозначим точку пересечения чевиан BM и CK как P. Проведём чевиану AL', содержащую точку P (рис. 36). Тогда по уже доказанному прямому утверждению теоремы Чевы выполняется соотношение $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$.

Значит, $\frac{BL'}{L'C} = \frac{BL}{LC}$, то есть точки L и L' делят отрезок BC в одинаковом отношении, а следовательно, совпадают. Мы получили противоречие, значит, наше предположение было неверно и все три чевианы пересекаются в одной точке.

Что и требовалось доказать.

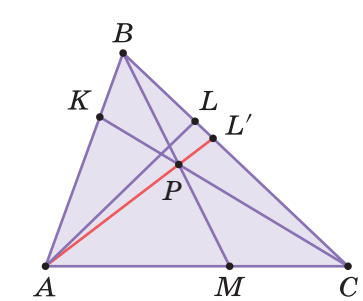


Рис. 36

Как доказать теорему Чевы с помощью площадей, используя свойство «дельта-плана»?

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Теорему Чевы легко запомнить, если шесть отрезков, на которые точки K, L и M делят периметр треугольника, покрасить в два цвета. Давайте покрасим их в красный и зелёный цвета так, чтобы соседние отрезки имели разный цвет (рис. 37). Тогда равенство теоремы Чевы будет эквивалентно тому, что произведение красных отрезков равно произведению зелёных. Тогда теореме Чевы можно дать красивую «цветную» формулировку.

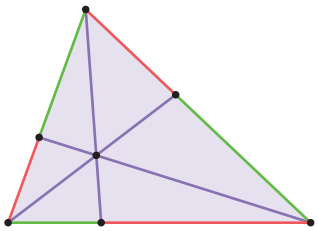
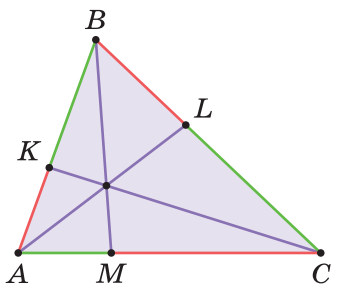


Рис. 37

ТЕОРЕМА ЧЕВЫ

Пусть отрезки, на которые делят стороны треугольника ABC точки K, L и M, через один покрашены в красный и зелёный цвет. Тогда отрезки AL, BM и CK, соединяющие эти точки с противоположными вершинами треугольника, пересекаются в одной точке только тогда, когда произведение длин красных отрезков равно произведению длин зелёных.

$$AK \cdot BL \cdot CM = KB \cdot LC \cdot MA.$$



Мы с вами рассмотрели три случая расположения точек K, L и M на прямых, содержащих стороны треугольника ABC, для которых выполнено равенство

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{AM} = 1.$$

Наверняка вы заметили, что для теорем Чевы и Менелая это равенство одно и то же, а условия самих теорем различаются лишь расположением точек K, L и M. В частности, если на сторонах треугольника лежат две из этих точек или не лежит ни одной, то будет выполняться обратная теорема Менелая.

УПРАЖНЕНИЯ

18. Сформулируйте и докажите теорему Чевы в случае, когда две точки лежат на продолжениях сторон треугольника, а третья — на его стороне (рис. 38).

19. В треугольнике ABC точка K делит сторону AB в отношении $1 : 2$, считая от вершины A, а точка L делит сторону BC в отношении $1 : 2$, считая от вершины C. Прямые AL и CK пересекаются в точке P. В каком отношении прямая BP делит сторону AC?

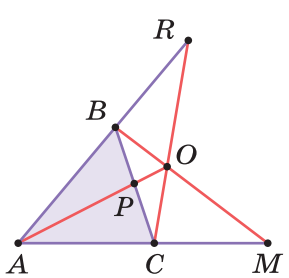


Рис. 38

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

20. На сторонах BC и AC треугольника ABC выбраны точки E и F соответственно так, что $FC = 2EC$, а $BE = 2AF$. Отрезки AE и BF пересекаются в точке P. В каком отношении прямая CP делит сторону AB?

21. На клетчатой бумаге изображён прямоугольный треугольник (рис. 39). В каком отношении точка D делит его гипотенузу?

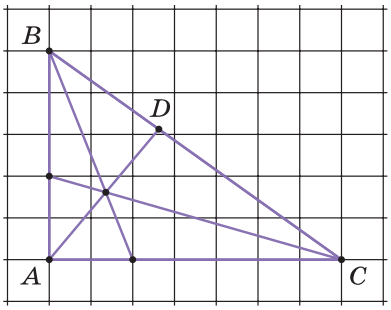


Рис. 39

22. Вася пролил чернила на клетчатую бумагу (рис. 40). Помогите ему понять, пересекаются ли отрезки AG, CE и BD в одной точке.

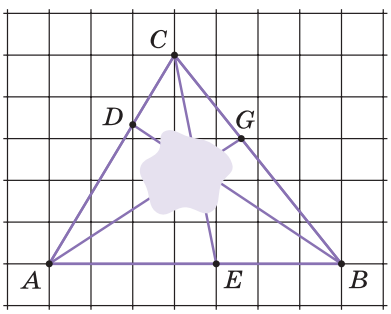


Рис. 40

Замечательные точки в треугольнике

Используя теорему Чевы, гораздо легче доказывать, что чевианы треугольника пересекаются в одной точке. Благодаря этой теореме мы добавим новые замечательные точки в треугольнике к тем, которые нам уже известны.

Давайте посмотрим, как эта теорема «работает» на уже знакомых нам чевианах треугольника — его медианах и биссектрисах. Про высоты треугольника мы поговорим чуть позже.

Итак, для доказательства того, что чевианы AL, BM и CK треугольника ABC пересекаются в одной точке, теперь нам достаточно лишь проверить такое равенство:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Медианы и биссектрисы. Пусть все три чевианы — это медианы треугольника (рис. 41). Тогда каждая из дробей, входящих в условие теоремы Чевы, будет равна 1. Поэтому и произведение этих дробей будет равно 1. Значит, медианы треугольника пересекаются в одной точке. Вот и всё — как мы и обещали, доказательство для медиан получилось в одну строчку!

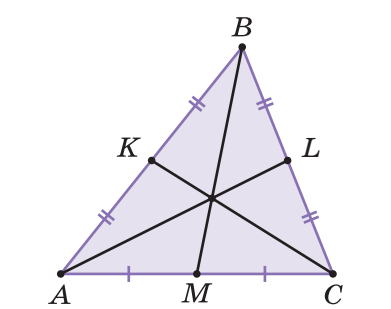


Рис. 41

Не намного сложнее выглядит такое же доказательство и для биссектрис треугольника. Применим теорему Чевы к биссектрисам AL, BM, CK треугольника ABC (рис. 42). По свойству биссектрисы треугольника для них справедливы равенства

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{CB}, \frac{BL}{LC} = \frac{BA}{AC}, \frac{CM}{MA} = \frac{CB}{BA}.$$

Если перемножить все эти равенства, то мы получим

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CB}{BA} = 1.$$

Значит, биссектрисы треугольника обязательно пересекаются в одной точке по теореме Чевы.

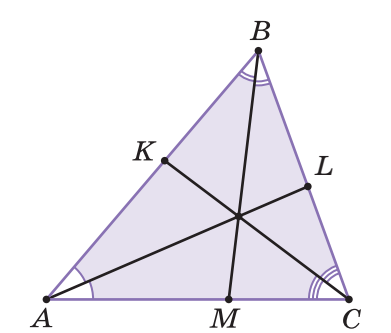


Рис. 42

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Теперь познакомимся с новыми замечательными точками треугольника — **точкой Жергонна** и **точкой Нагеля**. Обе эти точки связаны с окружностями, касающимися сторон треугольника: точка Жергонна — с окружностью, вписанной в треугольник, а точка Нагеля — с его вневписанными окружностями.

ПРИМЕР 4. ★☆☆ Вписанная окружность касается сторон треугольника в трёх точках. Каждую из этих точек соединили с вершиной, противоположной стороне, на которой лежит эта точка (рис. 43). Докажите, что три таких отрезка пересекаются в одной точке.

Точка пересечения таких чевиан называется **точкой Жергонна** треугольника и часто обозначается буквой G.

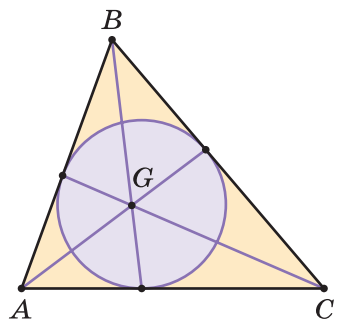


Рис. 43

РЕШЕНИЕ

Пусть вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB, BC и CA в точках P, Q и R соответственно. Докажем, что отрезки AQ, BR и CP пересекаются в одной точке.

Для этого достаточно проверить выполнение условия теоремы Чевы. Заметим, что $AP = AR = a$, $BP = BQ = b$ и $CQ = CR = c$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из вершин треугольника (рис. 44). Тогда

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1.$$

Что и требовалось доказать.

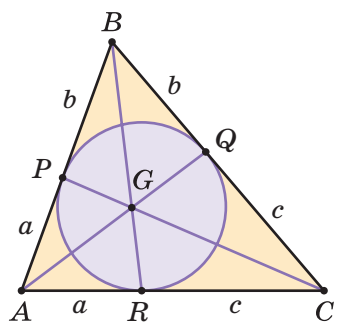


Рис. 44

Аналогичный факт можно сформулировать и для вневписанных окружностей. Отметим три точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника. А теперь соединим эти точки с противоположными от них вершинами треугольника. (рис. 45). Тогда три полученных отрезка будут пересекаться в одной точке, которую называют **точкой Нагеля** треугольника и обозначают буквой N.

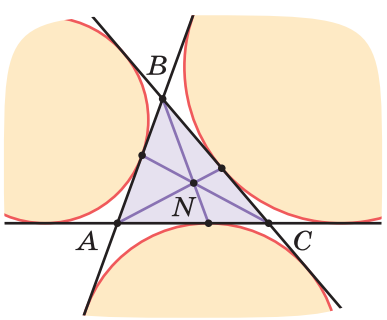


Рис. 45

УПРАЖНЕНИЕ

23. Докажите существование точки Нагеля для произвольного треугольника.

В примерах выше применялась обратная теорема Чевы. Рассмотрим пример использования самой теоремы Чевы.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ПРИМЕР 5. ★★☆ Пусть в треугольнике ABC проведены чевианы AL, BM и CK, пересекающиеся в одной точке. Через вершину B проведена прямая l, параллельная прямой AC. Пусть Q и P — точки пересечения прямых ML и MK с прямой l. Докажите, что тогда $PB = QB$ (рис. 46).

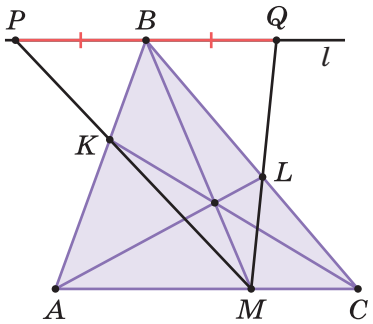


Рис. 46

РЕШЕНИЕ

Заметим, что треугольники AKM и BKP образуют стандартное положение «песочные часы» и, следовательно, подобны. А значит, для их сторон можно записать равенство $\frac{PB}{BK} = \frac{MA}{AK}$. Аналогично подобны треугольники BQL и CML, из чего получаем равенство $\frac{BQ}{BL} = \frac{CM}{CL}$.

Теперь разделим второе равенство на первое и домножим обе части на дробь $\frac{BL}{BK}$:

$$\frac{QB}{BL} \cdot \frac{BK}{BP} \cdot \frac{BL}{BK} = \frac{CM}{CL} \cdot \frac{AK}{MA} \cdot \frac{BL}{BK}.$$

Тогда левая часть полученного равенства равна $\frac{QB}{BP}$, а правую можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{CM}{CL} \cdot \frac{AK}{MA} \cdot \frac{BL}{BK} = \frac{CM \cdot AK \cdot BL}{CL \cdot MA \cdot BK} = \frac{CM \cdot AK \cdot BL}{MA \cdot BK \cdot CL} =$$

$$= \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} = 1.$$

Здесь последнее равенство выполняется по теореме Чевы для чевиан AL, BM и CK в треугольнике ABC.

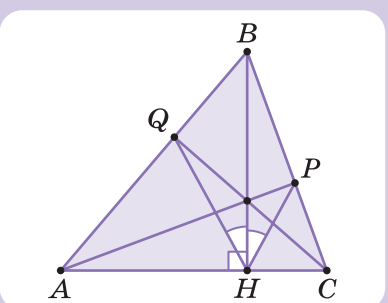
Получается, что $\frac{QB}{BP} = 1$, откуда $QB = PB$.

Что и требовалось доказать.

Из доказанного нами утверждения следует ещё одна красивая теорема. Попробуйте доказать её самостоятельно в качестве упражнения.

ТЕОРЕМА БЛАНШЕТА

Если чевианы AP и CQ треугольника ABC пересекаются на его высоте BH, тогда HB — биссектриса угла PHQ.



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Теорема Чевы в тригонометрической форме

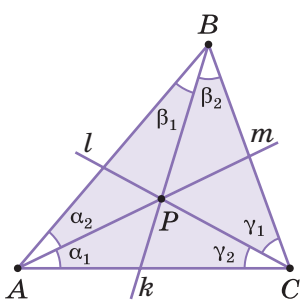
До сих пор мы говорили о положении трёх точек на прямых, содержащих стороны треугольника, и рассматривали отношения отрезков на этих прямых. Это помогло нам сформулировать теоремы Чевы и Менелая. Но бывают ситуации, когда рассматривать отношения длин отрезков на сторонах треугольника неудобно. Как правило, такие задачи связаны с углами в треугольнике. Например, любая чевиана делит в некотором отношении не только сторону треугольника, но и тот угол, из вершины которого она выходит.

Оказывается, что любую чевиану в треугольнике можно задать не отношением отрезков или частей, на которые она делит угол треугольника, а отношением синусов этих углов. И тогда теорему Чевы можно будет сформулировать в тригонометрической форме.

ТЕОРЕМА ЧЕВЫ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Пусть лучи k, l и m выходят из вершин A, B и C треугольника ABC и образуют с его сторонами углы, градусные меры которых соответственно равны α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2. Для того чтобы эти лучи пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1.$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Необходимость. Докажем сначала *необходимость*, или прямое утверждение: если лучи k, l и m пересекаются в одной точке P, то выполняется равенство

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1.$$

Применим теорему синусов к треугольникам ABP, BCP и CAP. Тогда мы получим следующие равенства:

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_1}=\frac{BP}{AP};\quad \frac{\sin\beta_2}{\sin\gamma_1}=\frac{CP}{BP};\quad \frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_1}=\frac{AP}{CP}.$$

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Если мы перемножим эти равенства, то получим:

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_1}\cdot\frac{\sin\beta_2}{\sin\gamma_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_1}=\frac{BP}{AP}\cdot\frac{CP}{BP}\cdot\frac{AP}{CP}=1.$$

Значит, необходимость доказана.

Достаточность. Для того чтобы доказать *достаточность*, или обратное утверждение, предположим противное. Пусть равенство из условия теоремы выполняется, а лучи k, l и m не пересекаются в одной точке. Обозначим точки пересечения этих лучей буквами X, Y и Z так, как это показано на рисунке 47.

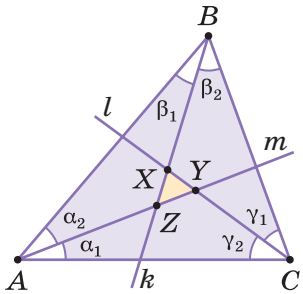


Рис. 47

Снова применим теорему синусов для треугольников AZB, BXC, CYA. Тогда мы получим три аналогичные равенства: $\frac{AZ}{\sin\beta_1}=\frac{BZ}{\sin\alpha_2}$, $\frac{BX}{\sin\gamma_1}=\frac{CX}{\sin\beta_2}$, $\frac{CY}{\sin\alpha_1}=\frac{AY}{\sin\gamma_2}$.

Перемножим эти равенства, а потом перенесём все синусы в одну часть, а все отрезки — в другую. Тогда мы получим $\frac{AZ}{AY}\cdot\frac{BX}{BZ}\cdot\frac{CY}{CX}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$.

Выражение, стоящее справа, по условию равно 1. Но каждый множитель в произведении слева меньше 1. Поэтому их произведение тоже должно быть меньше 1. Мы получили противоречие. Значит, наше предположение было неверно и лучи k, l и m пересекаются в одной точке. Достаточность доказана.

Что и требовалось доказать.

Как сформулировать утверждение, аналогичное теореме Чевы в тригонометрической форме для четырёхугольника? Верно ли оно?

УПРАЖНЕНИЯ

24. С помощью теоремы Чевы в тригонометрической форме докажите, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке (рис. 48).

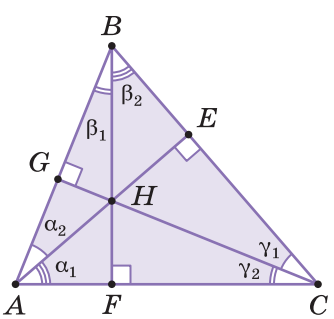


Рис. 48

25. В треугольнике ABC взяли точку O так, что углы OAB и OCA равны 30°, а углы OAC и OCB равны 45°. В каком отношении прямая BO делит сторону AC?

26. Пересекаются ли в одной точке лучи, исходящие из вершин треугольника на рисунке 49?

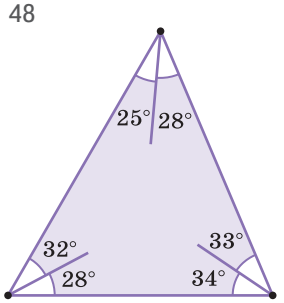
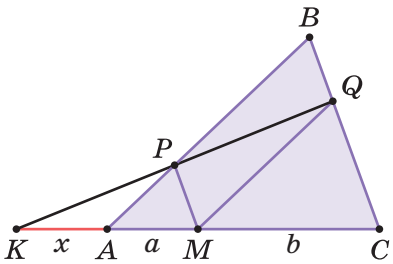


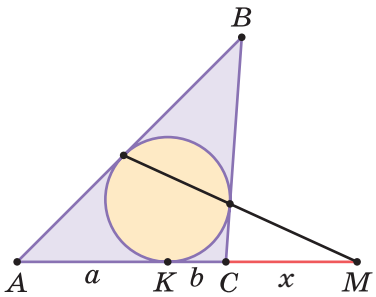
Рис. 49

27. В прямоугольном треугольнике ABC взяли такую точку O, что угол OAB равен углу OBC и равен 30°, а углы OAC и OBA равны 15°. Найдите угол между прямыми OC и AB.

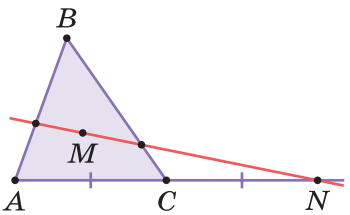
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 1



задача 2



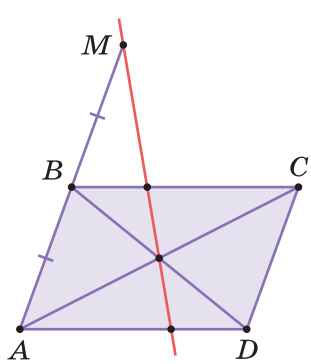
задача 4

ЗАДАЧИ

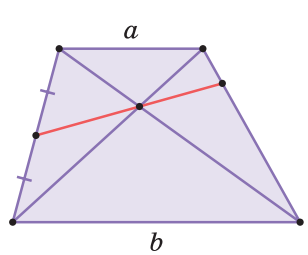
1. ★☆☆ Через точку M на основании AC треугольника ABC провели прямые, параллельные двум другим его сторонам и пересекающие их в точках P и Q. Прямая PQ пересекает прямую AC в точке K. Найдите отрезок AK, если $AM = a$, $CM = b$. (▸▸ рис.)

2. ★☆☆ Вписанная в треугольник ABC окружность касается его стороны AC в точке K. Известно, что $AK = a$, $CK = b$ ($a > b$). Прямая, проходящая через точки касания этой окружности с другими сторонами треугольника, пересекает прямую AC в точке M. Найдите MC. (▸▸ рис.)

3. ★☆☆ Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC и AC в точках M, N и K соответственно. Прямая MN пересекает прямую AC в точке P, при этом $PC = AC$. В каком отношении точка K делит сторону AC?



задача 5



задача 11

4. ★☆☆ Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. На прямой AC взяли точку N так, что точка C — середина отрезка AN. В каком отношении прямая MN делит стороны AB и BC треугольника? (▸▸ рис.)

5. ★☆☆ На продолжении стороны AB параллелограмма $ABCD$ взяли точку M так, что $BM = AB$. Через точку M и центр параллелограмма провели прямую. В каком отношении эта прямая делит стороны параллелограмма? (▸▸ рис.)

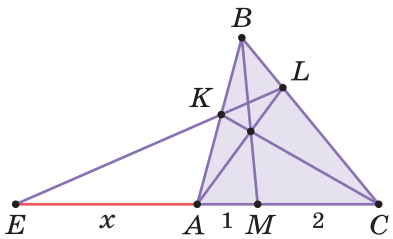
6. ★☆☆ На продолжении основания AD трапеции $ABCD$ взяли точку K так, что $AK = AD$. Диагонали трапеции пересекаются в точке E. Найдите отношение, в котором прямая KE делит боковую сторону AB трапеции, если $BC = 2$, $AD = 5$.

7. ★☆☆ На медиане CM треугольника ABC взяли произвольную точку K. Прямые AK и BK пересекают стороны BC и AC соответственно в точках P и Q. Докажите, что $PQ \parallel AB$.

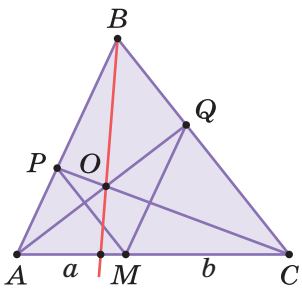
8. ★☆☆ На продолжнении стороны AC треугольника ABC за точку C взяли точку M так, что $CM : AC = 4 : 5$. Через точку M провели прямую, которая делит стороны AB и BC треугольника в одинаковом отношении. Найдите это отношение.

9. ★☆☆ На сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно взяли точки P и Q так, что $BP = BQ$. От-

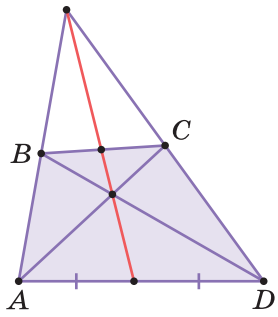
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 12



задача 13



задача 14

резки AQ и CP пересекаются в точке O. Прямая BO пересекает сторону AC треугольника в точке E. Докажите, что $AE : EC = AP : CQ$.

10. ★☆☆ Прямая отсекает от соседних сторон параллелограмма одну треть и одну четверть этих сторон, считая от общей вершины. Какую часть отсекает эта прямая от диагонали параллелограмма, выходящей из этой вершины?

11. ★★☆ Основания трапеции равны a и b. Через середину её боковой стороны и точку пересечения диагоналей проведена прямая. В каком отношении она делит другую боковую сторону трапеции? (▸▸ рис.)

12. ★☆☆ Чевианы AL, BM и CK треугольника ABC пересекаются в одной точке. Прямые KL и AC пересекаются в точке E. Найдите отрезок AE, если $AM = 1$, а $CM = 2$. (▸▸ рис.)

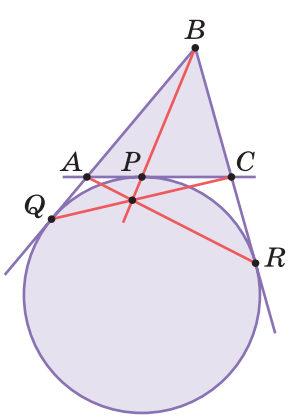
13. ★★☆ Через точку M на основании AC треугольника ABC провели прямые, параллельные двум другим его сторонам и пересекающие стороны AB и BC соответственно в точках P и Q. Отрезки AQ и CP пересекаются в точке O. В каком отношении прямая BO делит сторону AC, если $AM = a$, $CM = b$? (▸▸ рис.)

14. ★★☆ Прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ с точкой пересечения прямых AB и CD, делит сторону AD пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону BC. (▸▸ рис.)

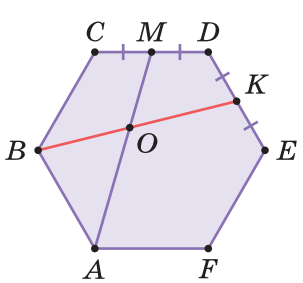
15. ★★☆ Окружность касается стороны AC треугольника ABC в точке P, а продолжений сторон BA и BC в точках Q и R соответственно. Докажите, что прямые AR, BP, CQ пересекаются в одной точке. (▸▸ рис.)

16. ★★☆ Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC опущена высота CH. В треугольнике ACH проведена биссектриса CL. Прямая, проходящая через точку B параллельно прямой CL, пересекает прямую CH в точке K. Докажите, что прямая KL делит катет AC пополам.

17. ★★☆ Точки M и K — середины сторон CD и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$. Отрезки AM и BK пересекаются в точке O. Найдите $BO : OK$. (▸▸ рис.)

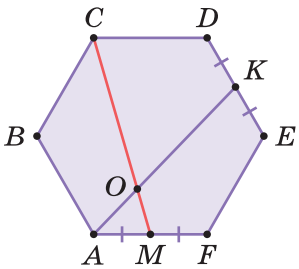


задача 15

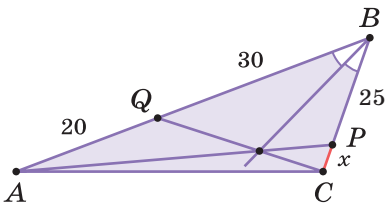


задача 17

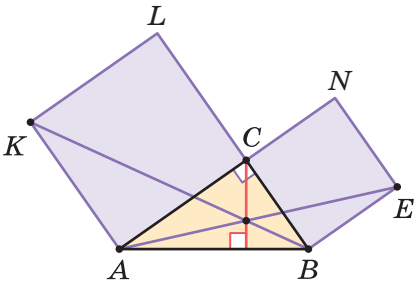
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 18



задача 19



задача 20

18. ★★☆ Точки M и K — середины сторон AF и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Найдите $CO : OM$. (рис.)

19. ★★☆ Точка пересечения чевиан AP и CQ треугольника ABC лежит на биссектрисе угла B треугольника. Найдите длину отрезка PC, если известно, что $AQ = 20$, $QB = 30$, $BP = 25$. (рис.)

20. ★★☆ На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $AKLC$ и $BCNE$. Докажите, что точка пересечения прямых AE и BK лежит на высоте этого треугольника, опущенной на его гипотенузу. (рис.)

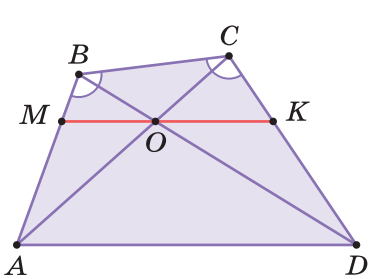
21. ★★☆ В четырёхугольнике $ABCD$ угол B равен углу C, а диагонали пересекаются в точке O. Через точку O параллельно стороне AD провели прямую, которая пересекла стороны AB и CD в точках M и K. Докажите, что $MO : OK = AB : CD$. (рис.)

22. ★★★ Углы при вершинах B и C треугольника ABC соответственно равны 22,5° и 45°. Докажите, что его высота AH, медиана BM и биссектриса CL пересекаются в одной точке.

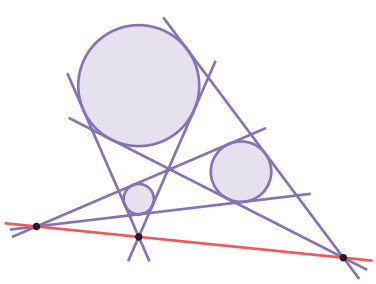
23. ★★★ Три окружности имеют разные радиусы и лежат вне друг друга. Докажите, что три точки пересечения общих внешних касательных к парам этих окружностей лежат на одной прямой. (рис.)

24. ★★★ Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC соответственно в точках M и N, а её центр лежит на стороне AC. Докажите, что точка пересечения отрезков AN и CM лежит на высоте треугольника ABC, опущенной из вершины B. (рис.)

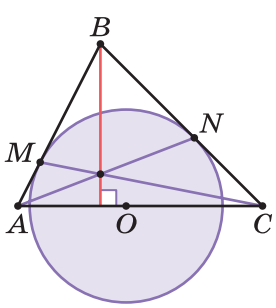
25. ★★★ (*Теорема Паскаля для треугольника.*) Докажите, что касательные к описанной окружности неравнобедренного треугольника, проведённые в его вершинах, пересекают прямые, содержащие противоположные стороны, в точках, лежащих на одной прямой.



задача 21

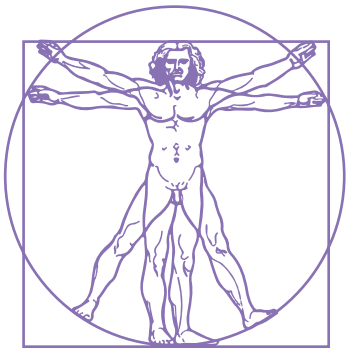


задача 23



задача 24

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

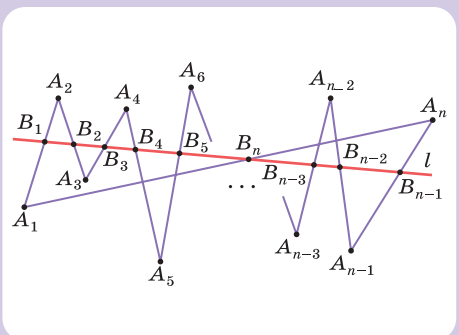
Теорема Менелая для замкнутой ломаной

Мы сформулировали теорему Менелая для треугольника. Оказывается, она верна для любого многоугольника или даже любой замкнутой ломаной. Правда, в этом случае такая теорема будет справедлива только в одну сторону. Давайте её сформулируем.

ОБОБЩЁННАЯ ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ

Если прямая l пересекает прямые A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1, на которых лежат звенья произвольной замкнутой ломаной $A_1A_2 \ldots A_n$, соответственно в точках B_1, B_2, ..., B_n, то выполняется равенство

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdot \ldots \cdot \frac{A_nB_n}{B_nA_1} = 1.$$



Мы докажем эту теорему тем же способом, какой применили при доказательстве теоремы Менелая для треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Опустим из точек A_1, A_2, ..., A_n перпендикуляры на прямую l, обозначим их основания буквами C_1, C_2, ..., C_n, а их длины соответственно h_1, h_2, ..., h_n (рис. 50).

Заметим, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_1C_2$ образуют стандартное положение «песочные часы» и подобны по второму признаку. Поэтому точка B_1 делит отрезок A_1A_2

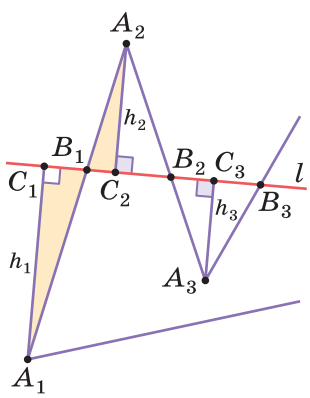


Рис. 50

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

в отношении, равном отношению высот, опущенных из точек A_1 и A_2 на прямую l:

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Так же из подобия треугольников $A_2B_2C_2$ и $A_3B_2C_3$ следует:

$$\frac{A_2B_2}{B_2A_3} = \frac{A_2C_2}{A_3C_3} = \frac{h_2}{h_3}.$$

Запишем аналогичные равенства для других звеньев этой ломаной или для продолжений этих звеньев. Поскольку ломаная замкнута, то для последнего звена мы получим такое равенство: $\frac{A_nB_n}{B_nA_1} = \frac{A_nC_n}{A_1C_1} = \frac{h_n}{h_1}$.

Если мы теперь перемножим все полученные равенства, то получим:

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdot \ldots \cdot \frac{A_nB_n}{B_nA_1} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{h_2}{h_3} \cdot \ldots \cdot \frac{h_n}{h_1} = 1.$$

Что и требовалось доказать.

☞ Теорема Менелая для многоугольника не верна в обратную сторону. Подумайте, почему это так, на примере четырёхугольника.

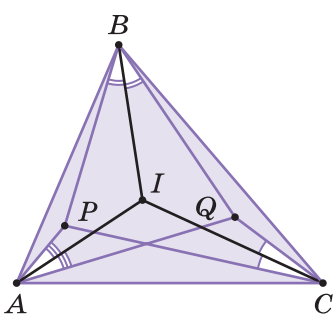
Изогональное сопряжение

Ещё одним важным примером использования теоремы Чевы в тригонометрической форме является следующий факт.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗОГОНАЛЬНОМ СОПРЯЖЕНИИ

Пусть три луча, выходящие из трёх вершин треугольника, пересекаются в одной точке P, не лежащей на его сторонах. Если отразить каждый из них симметрично относительно биссектрисы того угла треугольника, из вершины которого проведён данный луч, то получатся лучи, которые также будут пересекаться в одной точке Q.

Точки P и Q называются **изогонально сопряжёнными** относительно треугольника ABC.



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Получается, что к каждой замечательной точке треугольника можно рассмотреть ещё и ей изогонально сопряжённую. Понятно, что если сделать это ещё раз, то мы получим исходную точку. Оказывается, что некоторые известные вам точки в треугольнике изогонально сопряжены. Например, центр описанной окружности треугольника изогонально сопряжён точке пересечения его высот!

При изогональном сопряжении уже известных вам точек могут получаться и новые точки, которые мы раньше не рассматривали. Например, при изогональном сопряжении точки пересечения медиан треугольника получается новая точка, которую называют **точкой Лемуана**. Одно из самых интересных её свойств вы можете увидеть на рисунке 51.

В этом параграфе мы с вами познакомились с ещё двумя замечательными точками: точкой Жергонна и точкой Нагеля. Какими свойствами будут обладать точки, изогонально сопряжённые им? Удивительно, что обе эти точки будут лежать на одной прямой с центрами вписанной и описанной окружности треугольника!

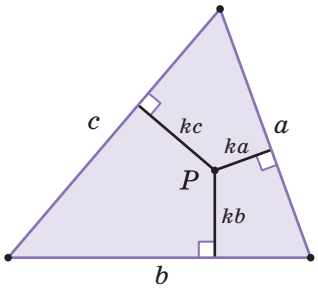


Рис. 51
Расстояния от точки Лемуана до сторон треугольника пропорциональны его соответствующим сторонам

УПРАЖНЕНИЯ

28. Докажите теорему об изогональном сопряжении.

29. Найдите точку, которая изогонально сопряжена самой себе. Сколько всего существует таких точек?

30. Докажите, что в непрямоугольном треугольнике центр описанной около него окружности и точка пересечения высот изогонально сопряжены.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

§6 Подобные треугольники в окружности

Подобные треугольники можно встретить не только при пересечении параллельных прямых и секущих, но и в окружности. Откуда они там? Вы наверняка помните замечательное свойство окружности: все вписанные в неё углы, которые опираются на одну дугу, равны между собой (рис. 1). Поэтому, когда в окружности вы проводите хорды или секущие, между ними возникают равные углы и, следовательно, подобные треугольники. Ведь для подобия треугольников достаточно равенства их двух соответственных углов. Итак, подобные треугольники совершенно естественно возникают не только в трапециях или параллелограммах, но и в окружностях. Более того — именно с подобием в окружности связано огромное число геометрических задач. Это всевозможные задачи на хорды, секущие и касательные. В этом параграфе мы с вами научимся находить подобные треугольники в окружностях и применять их для решения таких задач.

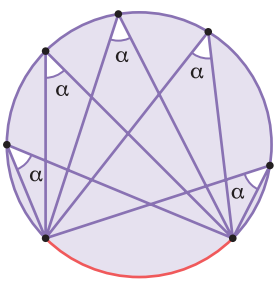


Рис. 1

Две хорды

Если в окружности провести две пересекающиеся хорды, то концы этих хорд и точка их пересечения будут вершинами для пары подобных треугольников. Давайте в этом убедимся. Возьмём произвольные хорды AB и CD окружности, которые пересекаются в точке M. Если мы соединим концы этих хорд отрезками AC и BD, то получим пару треугольников ACM и DBM, напоминающих бабочку (рис. 2). Оказывается, что крылья этой бабочки всегда подобны друг другу! Доказать это просто: углы при вершинах B и C в этих треугольниках равны, поскольку они опираются на дугу AD окружности. Так же будут равны их углы при вершинах A и D (рис. 3). Значит, треугольники ACM и DBM, которые в окружности образуют «бабочку», будут подобны по первому признаку.

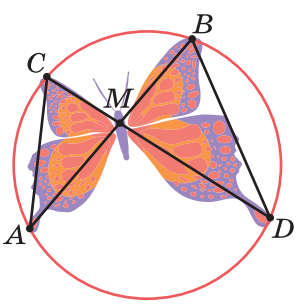


Рис. 2

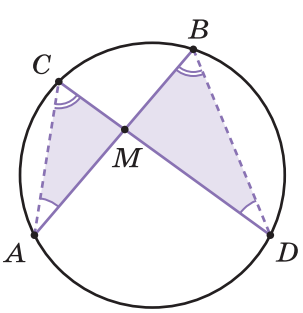


Рис. 3

Такое расположение треугольников в окружности мы будем считать стандартным и назовём его «бабочка». Обратите внимание: указанную «бабочку» всегда образует замк-

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

нутая самопересекающаяся ломаная, соединяющая любые четыре точки окружности.

Если вписать в окружность любой четырёхугольник и провести его диагонали, то мы получим сразу две пары подобных треугольников, или две такие «бабочки».

УПРАЖНЕНИЯ

1. Диагонали вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E (рис. 4). Найдите пары подобных треугольников на этом рисунке. Сколько вы нашли таких пар?

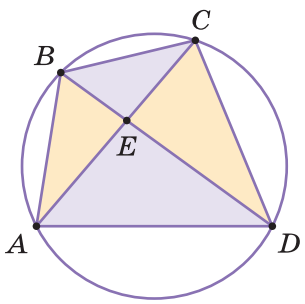


Рис. 4

2. Найдите длину отрезка, обозначенного на рисунках 5, 6, 7 буквой x.

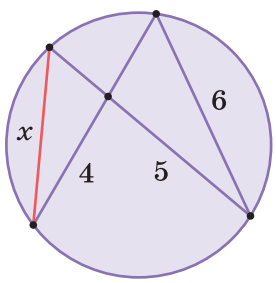


Рис. 5

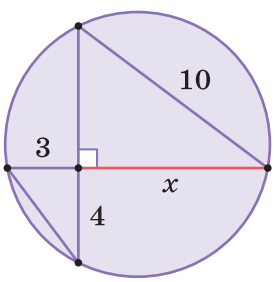


Рис. 6

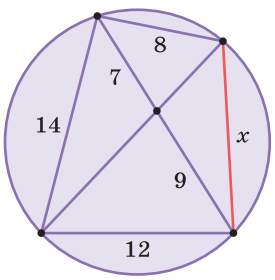


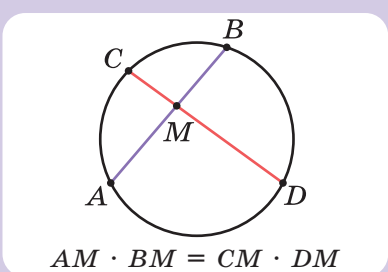
Рис. 7

Произведение отрезков хорд

Из подобия двух треугольников, образующих крылья бабочки, следует замечательное свойство хорд окружности, которое обычно называют теоремой о произведении отрезков хорд. Эту теорему легко запомнить и очень просто применять при решении задач.

ТЕОРЕМА О ПРОИЗВЕДЕНИИ ОТРЕЗКОВ ХОРД

Точка пересечения хорд окружности делит каждую из них на отрезки, произведение которых одинаково для каждой хорды.



$AM \cdot BM = CM \cdot DM$

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Треугольники ACM и DBM образуют в окружности «бабочку», поэтому они подобны (рис. 8). Их стороны AM и DM соответствуют друг другу, так как лежат против равных углов при вершинах C и B. Так же соответственными являются их стороны CM и BM. Запишем пропорцию сторон этих треугольников: $AM : DM = CM : BM$. Раскрывая эту пропорцию, мы получим, что $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Что и требовалось доказать.

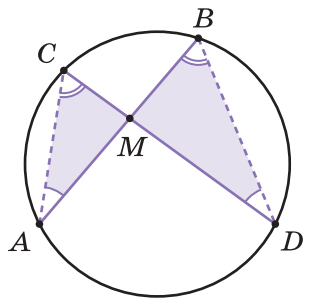


Рис. 8

УПРАЖНЕНИЯ

3. Найдите длину отрезка, обозначенного на рисунке 9 буквой x.

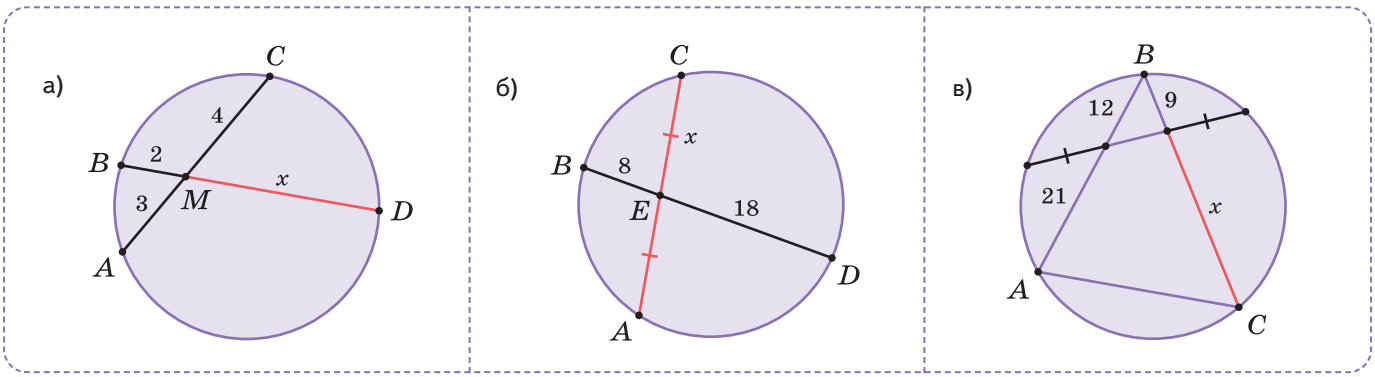


Рис. 9

4. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что произведение отрезков, на которые точка H делит каждую из них, одинаково (рис. 10).

5. На рисунке 11 определите длину хорды AB, если сторона клетки равна 1.

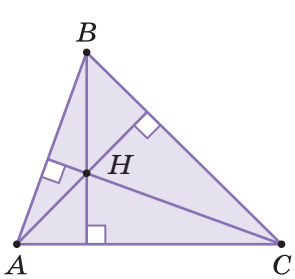


Рис. 10

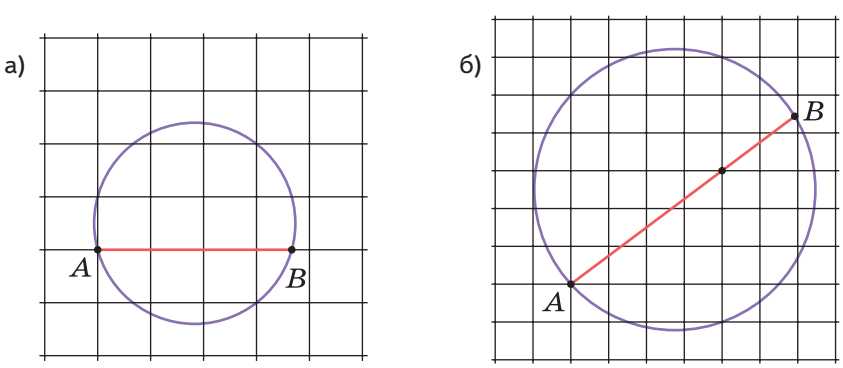


Рис. 11

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Две секущие

Две любые пересекающиеся хорды задают в окружности «бабочку» из подобных треугольников. А что будет, если сами хорды не имеют точки пересечения, а пересекаются продолжения этих хорд? Давайте рассмотрим такой случай. Пусть продолжения хорд AB и CD окружности пересекаются в некоторой точке M (рис. 12). Тогда прямые AB и CD называют секущими к окружности, проходящими через точку M. Оказывается, на этом рисунке тоже можно найти подобные треугольники!

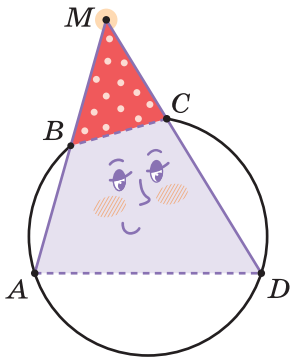


Рис. 12

Проведём отрезки AD и BC. Тогда мы получим пару треугольников AMD и CMB с общим углом при вершине M, находящейся вне нашего круга. Меньший из этих треугольников напоминает собой треугольный колпак, надетый на окружность.

Докажем, что треугольники AMD и CMB подобны. Обозначим величину угла при вершине A за α и рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, который вписан в данную окружность (рис. 13). По свойству вписанного четырёхугольника сумма его противоположных углов равна 180°. Значит, его угол BCD равен $180° - \alpha$. А поскольку угол BCM смежный с этим углом, то он будет равен $180° - (180° - \alpha) = \alpha$. Аналогично можно доказать, что равны углы ADM и CBM. Так мы получим, что треугольники AMD и CMB имеют по два равных угла, поэтому они подобны по первому признаку.

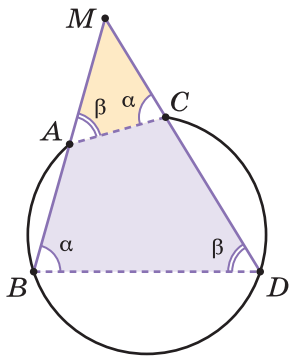


Рис. 13

Обратите внимание: отрезки BC и AD не обязательно параллельны, то есть такое положение подобных треугольников отличается от уже знакомого нам положения «пирамида».

Интересно, что если на рисунке с теми же секущими, проходящими через точку M, провести отрезки AC и BD, то мы тоже получим пару подобных треугольников с общим углом при вершине M (рис. 14). Но это будут уже другие треугольники AMC и DMB. Их положение на рисунке больше напоминает не колпак, а ножницы. Эти треугольники имеют общий угол и равные углы при вершинах A и D, которые в окружности опираются на одну дугу BC. Поэтому они тоже будут подобны по первому признаку подобия треугольников.

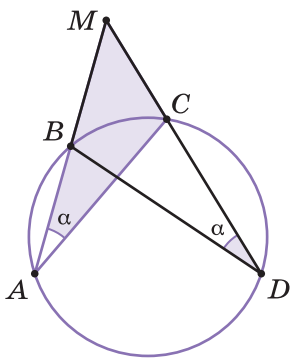


Рис. 14

УПРАЖНЕНИЯ

6. Найдите на рисунке 15 все пары подобных треугольников с вершинами в отмеченных точках. Сколько всего вы нашли таких пар?

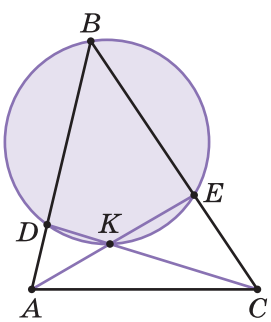


Рис. 15

7. В треугольнике ABC провели высоты AA_1 и BB_1. Какие треугольники с вершинами в точках A, B, C, A_1, B_1 будут подобны и почему?

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

8. Найдите длину отрезка, обозначенного на рисунке 16 буквой x.

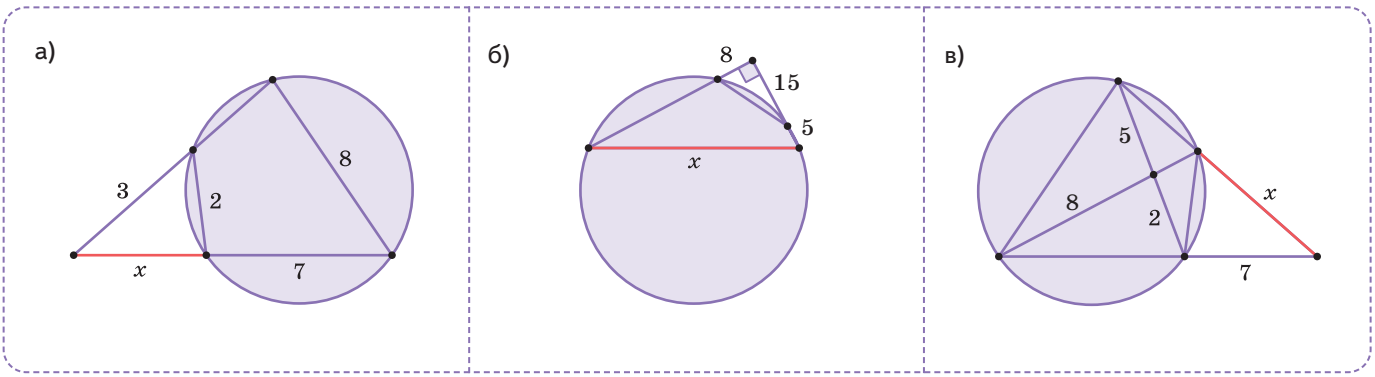


Рис. 16

Произведение отрезков секущих

Если через одну точку провести две секущие к окружности, то возникают подобные треугольники. Так же, как это было для отрезков хорд окружности, из подобия этих треугольников следует замечательное свойство отрезков секущих. Чтобы его было удобнее сформулировать, давайте определим, что такое отрезки секущей. Пусть через точку M, лежащую вне окружности, проведена любая прямая, пересекающая эту окружность в точках A и B. Как вы знаете, такую прямую называют секущей к окружности. Тогда отрезками этой секущей называют отрезки MA и MB. Больший из них называют отрезком всей секущей, а меньший — её внешней частью (рис. 17).

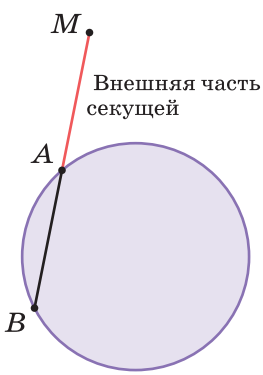


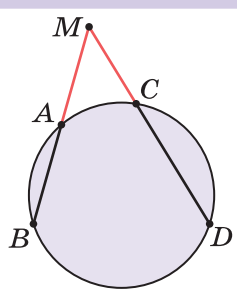
Рис. 17

Проведём через точку M, лежащую вне окружности, две секущие AB и CD. Тогда произведения отрезков секущих для каждой такой прямой будут одинаковы. В этом и заключается свойство секущих, которое мы сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА О ПРОИЗВЕДЕНИИ ОТРЕЗКОВ СЕКУЩЕЙ

Произведение отрезков секущих к окружности, проходящих через одну точку, одинаково для каждой секущей.

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть через точку M вне окружности проведены две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках A и B, а вторая — в точках C и D (рис. 18). Тогда треугольники MAC и MDB будут подобны друг другу и меньший из них как раз окажется в стандартном положении «колпак» на окружности. Стороны AM и DM этих треугольников будут соответствовать друг другу, поскольку они лежат против равных углов. Так же будут соответственными их стороны CM и BM. Запишем пропорцию для сторон в этих треугольниках: $MA : MD = MC : MB$. Раскрывая эту пропорцию, мы получим $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. То есть произведение отрезков одной секущей будет равно произведению отрезков другой.

Что и требовалось доказать.

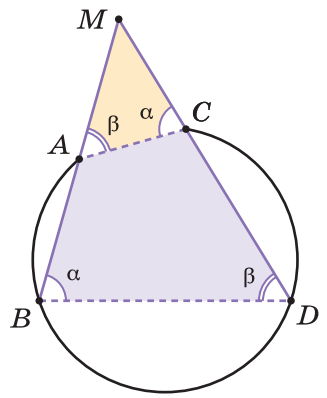


Рис. 18

Отметим, что обе теоремы о произведениях отрезков хорд или отрезков секущих к окружности, проходящих через точку M, записываются одинаковыми равенствами $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Поэтому важно помнить, что в каждом случае нужно перемножать отрезки с концами в точке M, через которую проходят обе хорды или обе секущие.

УПРАЖНЕНИЯ

9. Найдите длину хорды AB на рисунке 19, если сторона клетки равна 1.

10. В остроугольном треугольнике ABC высоты AK, BL и CM пересекаются в точке H. Докажите, что $BM \cdot BA = BH \cdot BL = BK \cdot BC$.

11. Найдите на рисунке 20 длину отрезка, обозначенного буквой x.

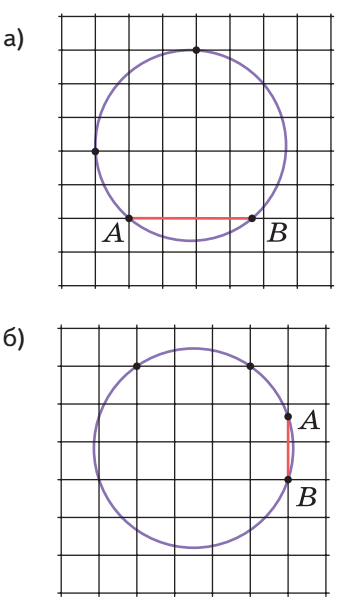


Рис. 19

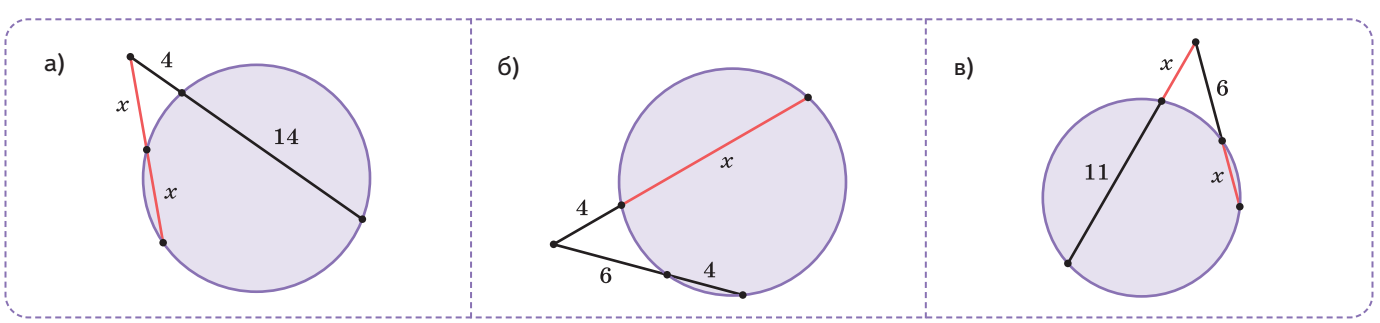
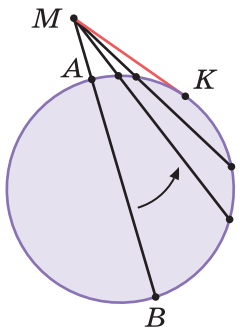


Рис. 20

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Квадрат отрезка касательной



$MA \cdot MB = MK^2$

Рис. 21

Через точку M, лежащую вне окружности, можно провести сколько угодно прямых, которые пересекают эту окружность. Мы с вами уже знаем, что на любых двух таких прямых произведение отрезков секущих будет одинаково. Значит, это произведение будет одинаково для всех секущих, проходящих через точку M. Проведём через точку M касательную MK к окружности и начнём «поворачивать» прямые вокруг точки M так, чтобы они приближались к этой касательной (рис. 21). Расстояние между точками A и B пересечения с окружностью на таких прямых будет всё меньше и меньше, пока обе эти точки не совпадут с точкой K.

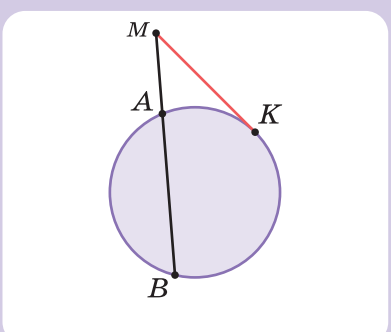
Какой вывод можно отсюда сделать? Если произведение отрезков секущих $MA \cdot MB$ одно и то же для всех прямых, пересекающих окружность, то оно останется таким же и в том предельном случае, когда точки A и B совпадут с точкой K. Но тогда для этой точки отрезки секущей MA и MB совпадут с отрезком MK, а их произведение будет равно квадрату MK^2 этой касательной. То есть можно считать, что касательная — это тоже секущая, просто обе её точки пересечения с окружностью совпадают.

Проведённое нами рассуждение не является элементарным доказательством в прямом смысле этого слова, поскольку оно использует переход к пределу. Именно поэтому его не могло быть в книге «Начала» Евклида. Ведь известно, что в Античности математика «боялась бесконечности». Поэтому мы приведём элементарное доказательство теоремы о квадрате касательной, которое интересно ещё и тем, что использует подобие треугольников. Но сначала сформулируем саму теорему.

ТЕОРЕМА О КВАДРАТЕ ОТРЕЗКА КАСАТЕЛЬНОЙ

Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей.

$MK^2 = MA \cdot MB$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть из точки M к окружности проведены касательная MK и прямая, пересекающая окружность в точках A и B. Проведём отрезки AK и BK (рис. 22).

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

А теперь заметим, что угол AKM лежит между данной касательной и хордой AK нашей окружности. По теореме об угле между касательной и хордой угол AKM равен вписанному углу ABK, который в этой окружности опирается на хорду AK.

Посмотрите на треугольники AKM и KBM. Они имеют общий угол при вершине M, а их углы при вершинах K и B равны. Значит, эти треугольники подобны по первому признаку. Соответственные стороны этих треугольников лежат против их равных углов, поэтому сторона AM в меньшем треугольнике AMK соответствует стороне MK в большем треугольнике KBM, а сторона MK — стороне MB. Давайте запишем отношение соответственных сторон в этих треугольниках: $\frac{AM}{MK} = \frac{MK}{BM}$.

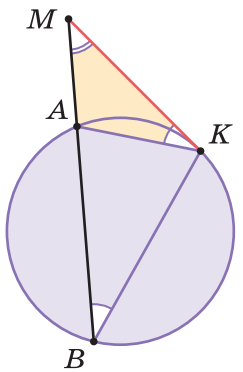


Рис. 22

Раскрывая эту пропорцию, мы получим, что

$$MK^2 = AM \cdot BM.$$

То есть квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей, проведённой из той же точки M.

Что и требовалось доказать.

Для решения задач полезно помнить не только теорему о квадрате отрезка касательной, но и о подобии двух треугольников, которые возникают при проведении к окружности касательной и секущей из одной точки.

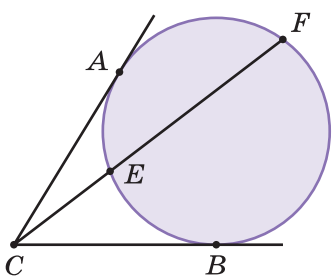
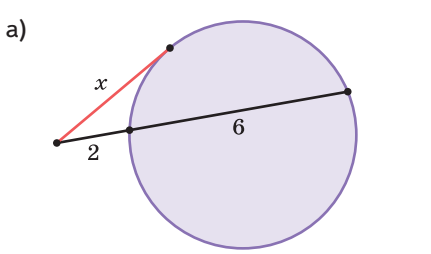


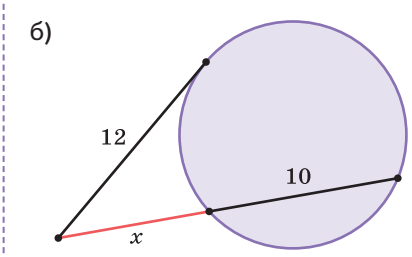
Рис. 23

УПРАЖНЕНИЯ

12. Найдите на рисунке 23 все пары подобных треугольников с вершинами в отмеченных точках.

13. На рисунке 24, а–в к окружностям проведены секущие и касательные. Найдите на каждом из них длину отрезка, обозначенного буквой x.





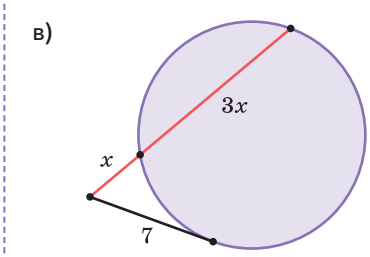


Рис. 24

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

14. На рисунке 25, а—в к окружностям проведены секущие и касательные. Найдите на каждом из них длину отрезка, обозначенного буквой x.

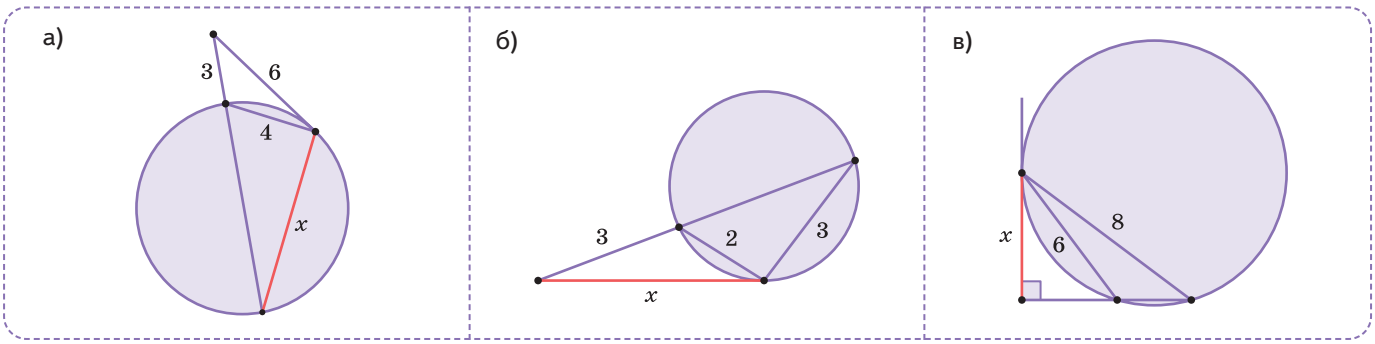


Рис. 25

15. Найдите длину хорды AB на рисунке 26, если сторона клетки равна 1.

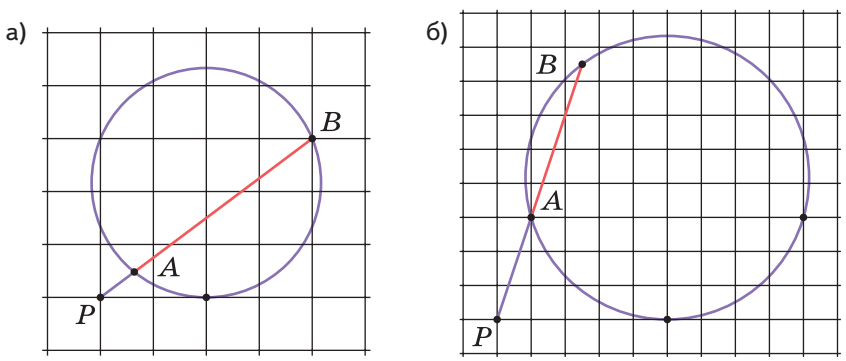


Рис. 26

16. На рисунке 27, а—г показаны различные расположения хорд, секущих и касательных, которые мы разобрали в этом параграфе. Найдите на каждом из рисунков треугольник с вершинами в отмеченных точках, подобный треугольнику ABC. Какой это треугольник?

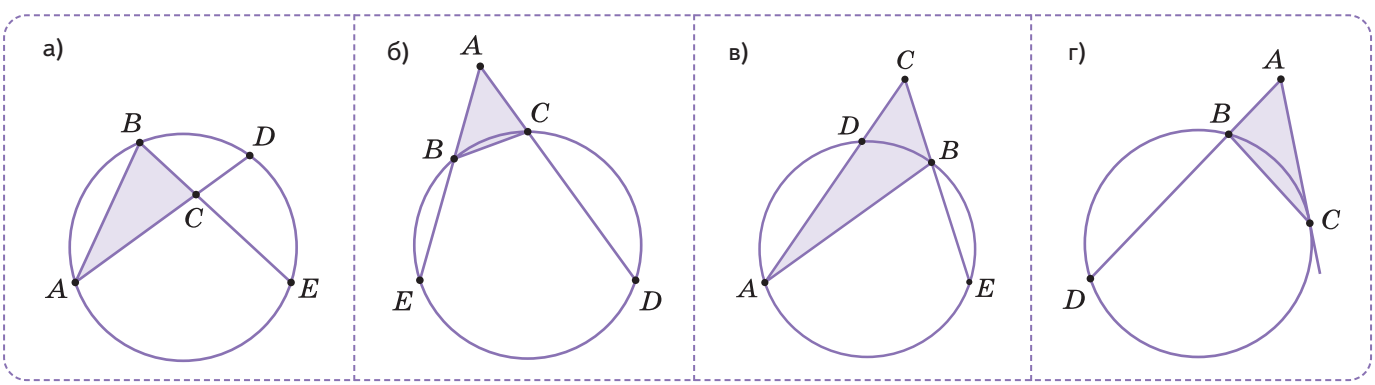


Рис. 27

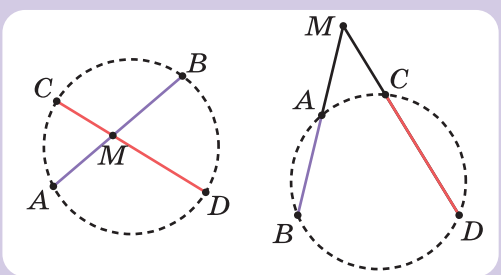
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Обратные теоремы

Мы рассмотрели три теоремы о произведениях отрезков, связанных с окружностью. В условии каждой из них была дана окружность и две пересекающие её прямые, а в её заключении утверждалось, что равны произведения некоторых отрезков. Оказывается, для каждой из этих теорем справедливо обратное утверждение. Как его сформулировать? Для этого нужно поменять местами условие и заключение теоремы. Давайте так и сделаем. Тогда в условии обратной теоремы будет дано равенство произведений отрезков, а в её заключении — утверждение об окружности. Так, утверждения обратные теоремам о произведении отрезков хорд или произведении отрезков секущих, станут признаком двух отрезков, концы которых лежат на одной окружности. Поэтому мы назовём его *признаком двух хорд*.

ПРИЗНАК ДВУХ ХОРД

Если отрезки AB и CD (либо их продолжения) пересекаются в точке M и выполняется равенство $MA \cdot MB = MC \cdot MD$, то эти отрезки являются хордами одной окружности.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Мы разберём случай, когда отрезки AB и CD пересекаются в точке M. Проведём отрезки AC и BD и получим треугольники MAC и MDB (рис. 28). Углы этих треугольников при вершине M будут равны, поскольку они вертикальные. Из данного равенства $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ следует пропорция $\frac{AM}{MC} = \frac{MD}{BM}$.

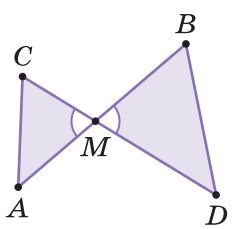


Рис. 28

Значит, треугольники MAC и MDB подобны по второму признаку подобия треугольников. Стороны AM и DM этих треугольников соответственные, поэтому должны быть равны углы при противоположных им вершинах B и C.

Рассмотрим четырёхугольник $ACBD$ (рис. 29). Так как его сторона AD видна под равными углами из вершин B и C, то этот четырёхугольник вписан в окружность по второму признаку вписанного четырёхугольника. Значит, отрезки AB и CD являются хордами одной окружности.

Случай, когда в точке M пересекаются продолжения отрезков AB и CD, рассматривается аналогично.

Что и требовалось доказать.

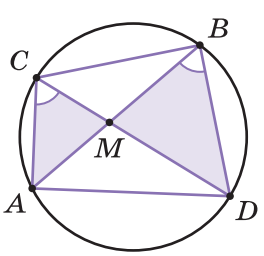


Рис. 29

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

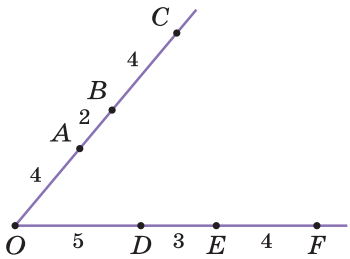
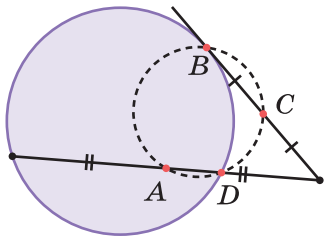


Рис. 30

а)



б)

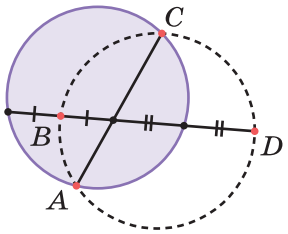


Рис. 31

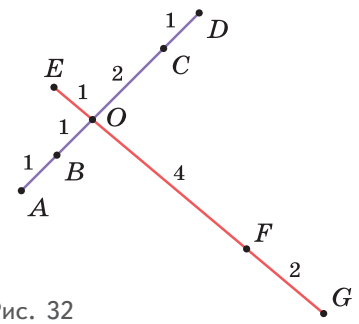


Рис. 32

УПРАЖНЕНИЯ

17. Докажите признак двух хорд для случая, когда пересекаются продолжения отрезков.

18. Сформулируйте признак двух хорд как признак четырёхугольника, вписанного в окружность.

19. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное теореме о квадрате отрезка касательной.

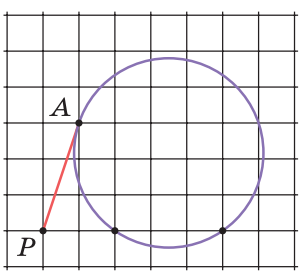
20. На сторонах угла, показанного на рисунке 30, отметили по три точки. Какие четыре из отмеченных шести точек лежат на одной окружности? Сколько ответов может быть у задачи?

21. Докажите, что точки A, B, C и D на рисунке 31 лежат на одной окружности.

22. На двух прямых, пересекающихся в точке O, отметили по три точки так, как это показано на рисунке 32. Какие четыре из отмеченных семи точек лежат на одной окружности? Сколько всего будет таких окружностей?

23. Пользуясь рисунком 33, докажите, что отрезок PA является касательной к проведённой окружности.

а)



б)

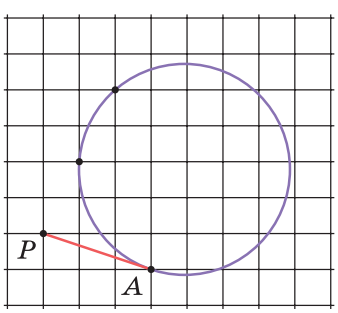


Рис. 33

Степень точки

Из одной точки M, лежащей вне окружности, можно провести множество прямых, которые пересекают эту окружность в двух точках. Напомним, что именно такие прямые называют **секущими**. На рисунке 34 показаны несколько таких прямых, пересекающих окружность соответственно в точках A_1 и B_1, A_2 и B_2, ..., A_n и B_n.

Проведём через ту же точку M касательную MK к данной окружности. По теореме квадрат отрезка этой ка-

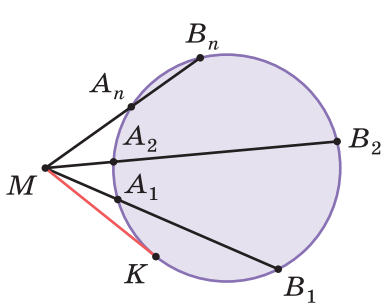


Рис. 34

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

сательной будет равен произведению отрезков секущих на любой из проведённых нами прямых. Поэтому можно написать, что

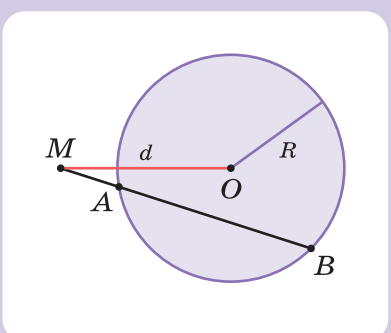
$$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 = \ldots = MA_n \cdot MB_n = MK^2.$$

Значит, произведение отрезков секущей будет одинаковым для любой прямой, проходящей через точку M. И равно оно будет квадрату отрезка касательной.

Произведение $MA \cdot MB$ отрезков секущих часто встречается в задачах, а значение этого произведения даже имеет собственное название — **степень точки P относительно окружности**. Мы сейчас увидим, что для вычисления степени точки даже не обязательно проводить какую-либо секущую или касательную.

СВОЙСТВО СТЕПЕНИ ТОЧКИ ВНЕ ОКРУЖНОСТИ

Если точка M лежит вне окружности радиуса R, то для любой секущей, выходящей из точки M и пересекающей окружность в точках A и B, выполняется равенство $AM \cdot BM = d^2 - R^2$, где d — расстояние от точки M до центра окружности.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Так как произведение отрезков секущей не зависит от выбора этой секущей, давайте возьмём в качестве этой секущей прямую, соединяющую точку M с центром O окружности (рис. 35). Обозначим точки пересечения этой секущей с окружностью через A и B, как это показано на рисунке. Тогда отрезки секущей можно выразить через R и d: $MA = d - R$, $MB = d + R$.

Значит, произведение этих отрезков будет равно $MA \cdot MB = (d - R) \cdot (d + R) = d^2 - R^2$.

Что и требовалось доказать.

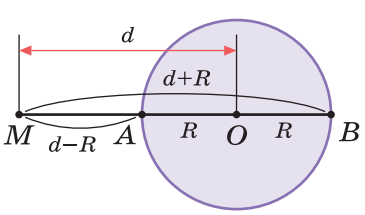
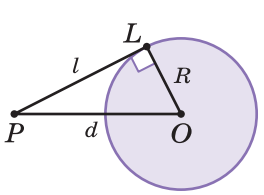


Рис. 35

Как на этом рисунке получить ещё одно доказательство свойства степени точки?

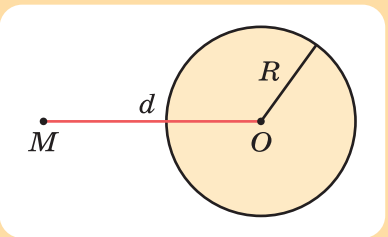


Выражение $d^2 - R^2$ для степени точки относительно окружности универсально для точек, лежащих как вне окружности, так и внутри неё, и даже для точек на самой окружности. Поэтому традиционно за определение степени точки относительно окружности берут именно его.

Давайте теперь запишем это определение степени точки.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Степенью точки M относительно окружности называют величину $d^2 - R^2$, где R — радиус окружности, а d — расстояние от точки M до её центра.



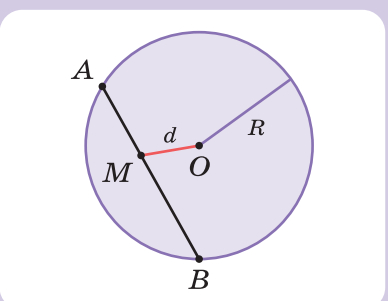
Мы с вами уже выяснили, что степень точки, лежащей вне окружности, равна квадрату отрезка касательной или произведению отрезков любой секущей, проведённых из этой точки к окружности. То есть в этом случае степень точки будет больше нуля. Впрочем, это сразу видно из определения степени $d^2 - R^2$, поскольку в этом случае $d > R$.

А какую степень будут иметь точки, лежащие на самой окружности? В этом случае расстояние d от точки до центра будет равно радиусу R окружности, поэтому её степень будет равна $R^2 - R^2 = 0$.

Если же точка окажется внутри окружности, то её степень $d^2 - R^2$ будет отрицательной, поскольку $d < R$. В этом случае степень точки не может быть равна произведению каких-либо отрезков. А вот для модуля этой степени можно сформулировать утверждение, аналогичное свойству точек, лежащих вне окружности.

СВОЙСТВО СТЕПЕНИ ТОЧКИ ВНУТРИ ОКРУЖНОСТИ

Если точка M лежит внутри окружности радиуса R, то произведение $AM \cdot BM$ отрезков любой проходящей через неё хорды AB равно модулю её степени относительно данной окружности. То есть $AM \cdot BM = R^2 - d^2$.



УПРАЖНЕНИЯ

24. Пользуясь рисунком 36, докажите свойство степени точки внутри окружности.

25. В окружность радиуса 1 вписали равносторонний треугольник. Через середину его стороны провели хорду. Чему равно произведение отрезков этой хорды?

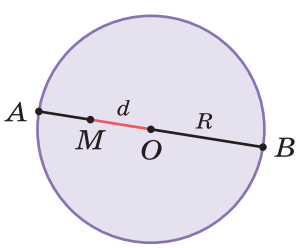


Рис. 36

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ВОПРОСЫ

1. Почему при проведении секущей и касательной из одной точки возникают подобные треугольники?
2. Какие вы знаете стандартные положения подобных треугольников, связанные с окружностью? Когда они возникают?
3. Каким свойством обладают секущие к окружности, выходящие из одной точки?
4. Как формулируется теорема о произведении отрезков хорд окружности?
5. В чём заключается теорема о квадрате отрезка касательной к окружности?
6. Как бы вы сформулировали утверждение, обратное теореме о произведении отрезков хорд окружности?
7. Как бы вы сформулировали утверждение, обратное теореме о произведении отрезков секущих?
8. Что такое степень точки относительно окружности? Для каких точек она больше нуля? Для каких точек она меньше нуля? Когда равна нулю?

В некотором треугольнике высота и медиана делятся точкой их пересечения на отрезки, произведение которых одинаково на каждой из этих линий. Обязательно ли такой треугольник равнобедренный?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1. ★☆☆ Стороны четырёхугольника, вписанного в окружность, равны последовательно 1, 2, 3 и 4 (рис. 37). Найдите отношение его диагоналей.

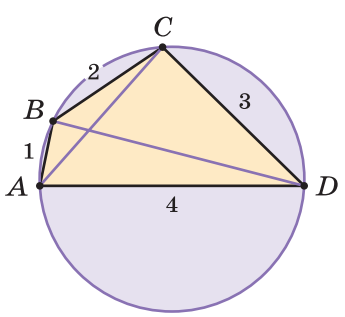


Рис. 37

РЕШЕНИЕ

Обозначим вершины четырёхугольника через A, B, C и D, а точку пересечения его диагоналей через M так, как показано на рисунке 38. Заметим, что на полученном рисунке мы легко можем выписать равенство произведений отрезков хорд для точки M. Но ни один из отрезков MA, MB, MC, MD нам не известен, поэтому это соотношение не помогает продвинуться в задаче.

Поэтому давайте воспользуемся подобием пар треугольников BCM и ADM, а также ABM и DCM. Коэффициент подобия первых двух треугольников равен $AD : BC = 4 : 2 = 2$, а коэффициент подобия второй пары равен $CD : AB = 3 : 1 = 3$. Обозначим длину отрезка BM через a. Тогда из подобия указанных треугольников найдём, что $MA = MB \cdot 2 = 2a \cdot MC = MB \cdot 3 = 3a$, $MD = MA \cdot 3 = 6a$. Откуда $AC = AM + MC = 5a$, а $BD = BM + MD = 7a$. Значит, $AC : BD = 5a : 7a = 5 : 7$.

Ответ: $AC : BD = 5 : 7$.

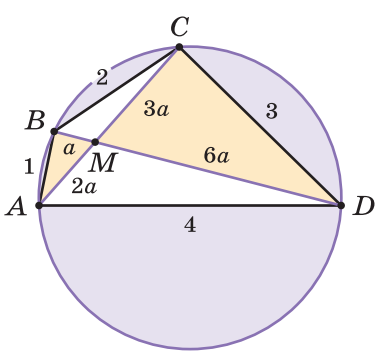


Рис. 38

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ПРИМЕР 2. ★☆☆ В окружность вписан треугольник ABC, причём $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 5$. Через вершину B к окружности провели касательную, которая пересекла прямую AC в точке K (рис. 39). Найдите AK.

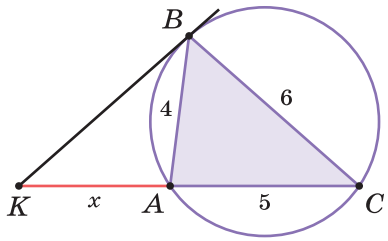


Рис. 39

РЕШЕНИЕ

Заметим, что из точки K к описанной окружности треугольника ABC проведены касательная и секущая. Значит, на рисунке можно найти два подобных треугольника. Действительно, треугольники BCK и ABK подобны (рис. 40), поскольку у них угол при вершине K общий, а углы ABK и BCK равны по теореме об угле между касательной и хордой. Стороны BC и AB этих треугольников соответственные, поэтому коэффициент их подобия равен $BC : AB = 6 : 4 = 1{,}5$.

Обозначим длину искомого отрезка AK через x. Тогда соответственная ей сторона KB треугольника BCK будет равна $1{,}5x$.

Запишем теорему о квадрате отрезка KB касательной: $KB^2 = KA \cdot KC = x \cdot (x + 5) = (1{,}5x)^2$.

Откуда найдём, что $x = 4$.

Ответ: 4.

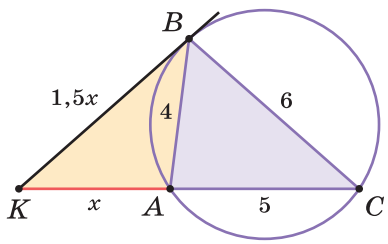


Рис. 40

ПРИМЕР 3. ★★☆ Окружность проходит через вершину квадрата, касается противоположной его стороны и делит диагональ, выходящую из этой вершины, в отношении 2 : 7. В каком отношении точка M делит сторону квадрата на рисунке 41?

РЕШЕНИЕ

Обозначим вершины квадрата $ABCD$, как показано на рисунке 42. Пусть окружность пересекается с диагональю AC в точке K и касается стороны AD в точке T.

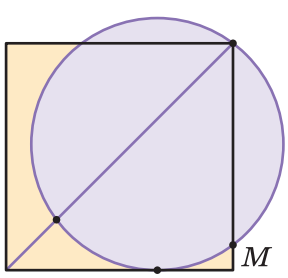


Рис. 41

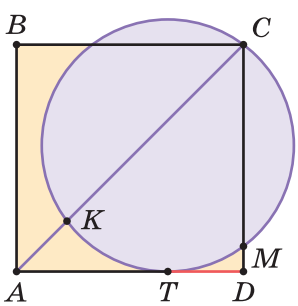


Рис. 42

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

Для того чтобы найти, в каком отношении точка M делит сторону квадрата, достаточно выразить длину отрезка DM через длину стороны квадрата. Обозначим длину отрезка DM через x, а сторону квадрата через a.

Поскольку точка K делит диагональ AC квадрата в отношении $2:7$, то длины отрезков AK и CK можно обозначить как $2m$ и $7m$ (рис. 43). Тогда длина диагонали будет равна $9m$. По теореме Пифагора квадрат диагонали AC равен $2a^2$. Поэтому $(9m)^2 = 2a^2$. Откуда $m = \sqrt{2} \cdot \frac{a}{9}$.

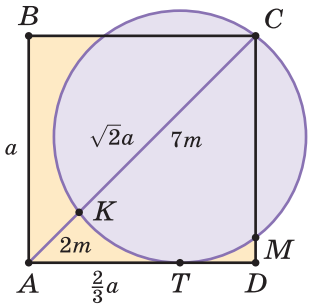


Рис. 43

Запишем теорему о квадрате касательной для отрезка AT:

$$AT^2 = AK \cdot AC = 2m \cdot 9m = 18m^2.$$

Тогда $AT = 3m \cdot \sqrt{2} = \frac{2a}{3}$.

Следовательно, $DT = \frac{a}{3}$.

Запишем теорему о квадрате касательной для отрезка DT: $\left(\frac{a}{3}\right)^2 = x \cdot a$. Откуда $x = \frac{a}{9}$. Поэтому $CM = 8\frac{a}{9}$.

Теперь найдём нужное отношение: $DM : CM = 1 : 8$.

Ответ: $1 : 8$.

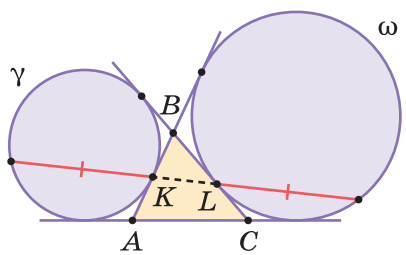


Рис. 44

ПРИМЕР 4. ★★☆ Две вневписанные окружности треугольника касаются его боковых сторон в точках K и L. Докажите, что на прямой KL они высекают равные хорды (рис. 44).

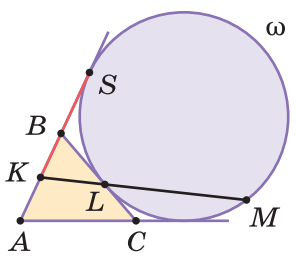


Рис. 45

РЕШЕНИЕ

Обозначим вершины треугольника через A, B и C, а две вневписанные окружности — через ω и γ. Точки касания прямых AB и BC с окружностями ω и γ обозначим соответственно через S и T, а вторые точки пересечения прямой KL этими окружностями — через M и N.

Для того чтобы доказать равенство хорд, найдём степени точек K и L относительно окружностей ω и γ.

Запишем теорему о квадрате касательной для отрезка касательной KS и секущей LM : $KS^2 = KL \cdot KM$ (рис. 45).

Аналогичное равенство можно получить для отрезка касательной LT : $LT^2 = LK \cdot LN$ (рис. 46).

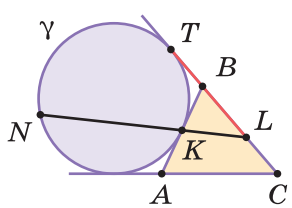


Рис. 46

Осталось заметить, что TL и KS — это общие внутренние касательные к окружностям ω и γ, поэтому равны между собой (рис. 47).

Отсюда получаем $KL \cdot KM = KS^2 = LT^2 = LK \cdot LN$. Откуда $KL : KM = LK : LN$.

Сокращая обе стороны равенства на KL, получаем равенство отрезков $KM = LN$, из чего следует требуемое равенство отрезков.

Что и требовалось доказать.

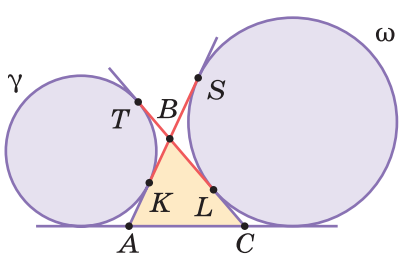


Рис. 47

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

ПРИМЕР 5. ★★★ Четырёхугольник вписан в окружность. Продолжения двух его противоположных сторон пересекаются в точке E, а продолжения двух других — в точке F. Длины отрезков касательных, проведённых из точек E и F к данной окружности, равны p и q (рис. 48). Найдите длину отрезка EF.

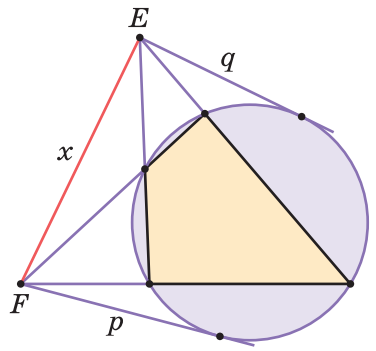


Рис. 48

РЕШЕНИЕ

Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω, продолжения его сторон AB и CD пересекаются в точке E, а продолжения сторон BC и AD в точке F. Сделаем дополнительное построение: проведём окружность через точки A, B и F. Почему нужно проводить именно такую окружность? В некотором смысле — от безысходности: ведь нужно как-то связать длину касательной из точки F с отрезком EF. Построенная нами новая окружность пересечёт отрезок EF в некоторой точке K (рис. 49).

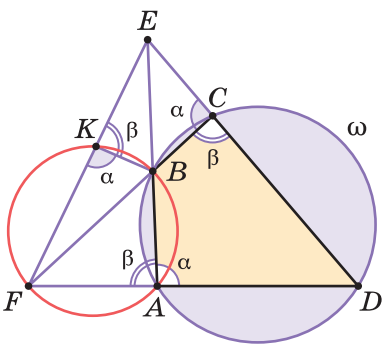


Рис. 49

Обозначим углы при вершинах A и C данного четырёхугольника $ABCD$ соответственно α и β и вспомним, что по свойству вписанного четырёхугольника $\alpha + \beta = 180°$. Угол FAB смежный с углом данного четырёхугольника, поэтому он будет равен $180° - \alpha = \beta$. Теперь рассмотрим четырёхугольник $AFKB$. Он вписан в построенную нами окружность, значит, по тому же свойству его угол при вершине K равен $180° - \beta = \alpha$.

Как вы думаете, зачем мы вычисляли эти углы? Всё верно — нас интересует третий четырёхугольник $BKEC$. Его углы при вершинах C и K будут смежными с углами двух первых четырёхугольников, поэтому они будут соответственно равны α и β. Мы уже знаем, что $\alpha + \beta = 180°$. Значит, третий четырёхугольник $BKEC$ тоже можно будет вписать в свою окружность по признаку (рис. 50).

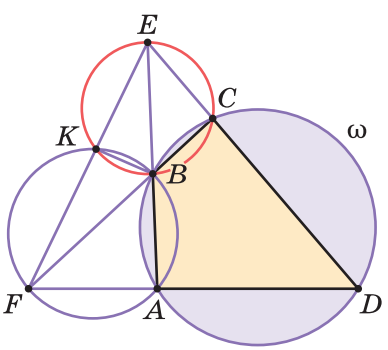


Рис. 50

Ну а теперь самое интересное. По теореме о квадрате отрезка касательной, проведённой из точки F к окружности ω, можно записать $p^2 = FA \cdot FD = FB \cdot FC$.

Поскольку четырёхугольник $BKEC$ вписан в окружность, то произведение отрезков секущих на прямых FC и FE должно быть одинаковым. Поэтому $FB \cdot FC = FK \cdot FE$.

Значит, должно выполняться следующее равенство: $p^2 = FK \cdot FE$.

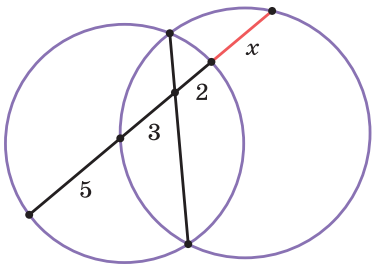
И такое же равенство можно записать для второй касательной: $q^2 = KE \cdot EF$.

Нам осталось сложить полученные равенства и получить, что $p^2 + q^2 = FK \cdot FE + KE \cdot EF = EF \cdot (FK + KE) = EF^2$.

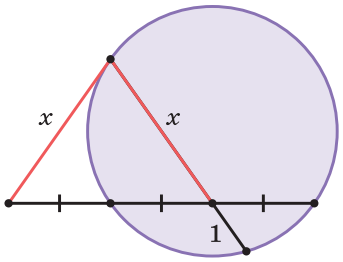
Откуда $EF = \sqrt{p^2 + q^2}$.

Ответ: $\sqrt{p^2 + q^2}$.

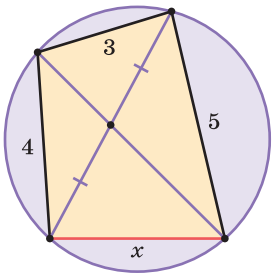
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 1



задача 2



задача 3

ЗАДАЧИ

1. ★☆☆ Прямая пересекает две окружности и их общую хорду в пяти точках. Три отрезка между этими точками на рисунке имеют длины 2, 3 и 5. Найдите длину четвёртого отрезка. (▸▸ рис.)

2. ★☆☆ Найдите длину отрезка, обозначенного на рисунке буквой x. (▸▸ рис.)

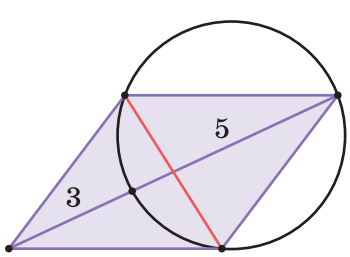
3. ★☆☆ Три стороны вписанного четырёхугольника равны 4, 3 и 5. Найдите ещё одну сторону этого четырёхугольника, если одна его диагональ делит другую пополам. (▸▸ рис.)

4. ★☆☆ Окружность, проходящая через три вершины параллелограмма, делит его диагональ на отрезки, равные 3 и 5. Чему равна вторая диагональ параллелограмма? (▸▸ рис.)

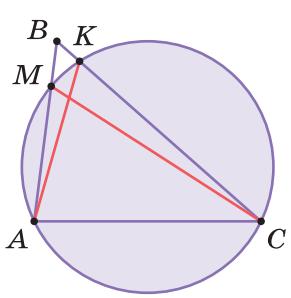
5. ★☆☆ Окружность проходит через три вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$ и содержит его внутри себя. Продолжение диагонали BD пересекает эту окружность в точке E. Найдите длину отрезка DE, если диагонали параллелограмма равны 4 и 6.

6. ★☆☆ Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC, пересекает его стороны AB и BC соответственно в точках M и K. Известно, что $AM : BM = 3 : 1$, $BK : CK = 1 : 8$. Найдите $AK : CM$. (▸▸ рис.)

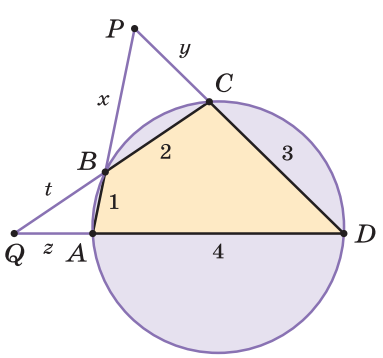
7. ★☆☆ Дан вписанный в окружность четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$, $DA = 4$. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и DA — в точке Q. Найдите сумму длин отрезков PB, PC, QA и QB. (▸▸ рис.)



задача 4

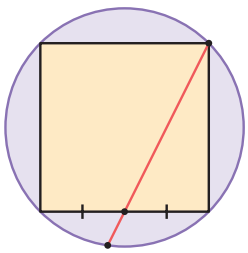


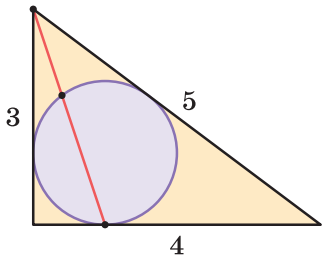
задача 6

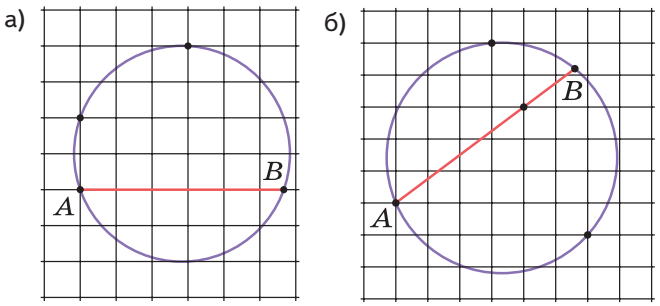


задача 7

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021







задача 11 задача 12 задача 13

8. ★☆☆ Основания трапеции, вписанной в окружность, равны 7 и 8, а её боковая сторона равна 4. Найдите длину хорды окружности, на которой лежит средняя линия этой трапеции.

9. ★☆☆ Точка P удалена на расстояние, равное 7, от центра окружности радиуса 11. Через точку P проведена хорда, равная 18. Найдите отрезки, на которые делится хорда точкой P.

10. ★☆☆ Окружность радиуса 1 касается двух катетов прямоугольного треугольника и делит его гипотенузу на три равные части. Найдите площадь треугольника.

11. ★☆☆ В окружность вписан квадрат. Через его вершину и середину противоположной стороны провели хорду. В каком отношении эта хорда делится стороной квадрата? (▸▸ рис.)

12. ★☆☆ В египетский треугольник вписали окружность. Точку её касания с бóльшим катетом соединили отрезком с противоположной вершиной. В каком отношении проведённый отрезок делится данной окружностью? (▸▸ рис.)

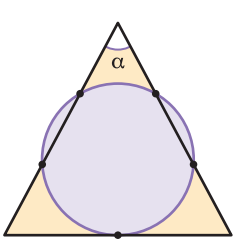
13. ★☆☆ Найдите длину хорды AB на рисунке, если сторона клетки равна 1. (▸▸ рис.)

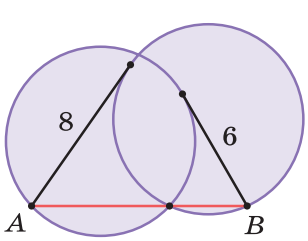
14. ★☆☆ В окружность вписан равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны 4, а основание — 1. Найдите длину хорды данной окружности, которая параллельна основанию этого треугольника и делится его боковыми сторонами на три равные части.

15. ★☆☆ Окружность касается основания треугольника и делит каждую из двух других его сторон на три равные части. Найдите косинус угла треугольника, лежащего против основания. (▸▸ рис.)

16. ★☆☆ На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные 2 и 7, считая от вершины при основании. Найдите основание треугольника.

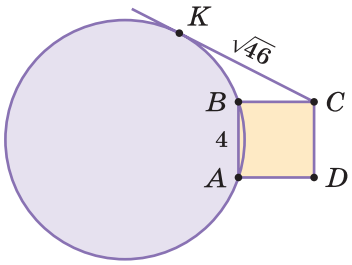
17. ★☆☆ Через общую точку двух окружностей провели прямую, вторично пересекающую их в точках A и B. Отрезки касательных, проведённые из полученных точек к данным



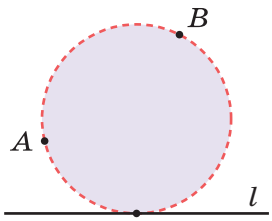


задача 15 задача 17

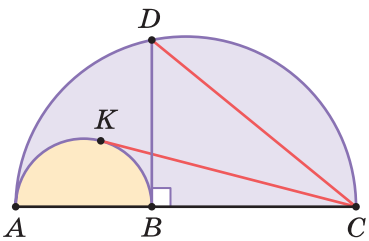
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 18



задача 21



задача 22

окружностям, равны 6 и 8. Найдите длину отрезка AB. (▸▸ рис.)

18. ★☆☆ Сторона AB квадрата $ABCD$ равна 4 и является хордой окружности, причём остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Отрезок касательной, проведённой к ней из точки C, равен $\sqrt{46}$. Найдите диаметр окружности. (▸▸ рис.)

19. ★★☆ В окружность вписан равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны a. Через его вершину провели хорду окружности длины b, которая пересекает основание треугольника. Найдите длину отрезка этой хорды, лежащего в данном треугольнике.

20. ★★☆ Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Касательные к ней, проведённые в точках A и C, пересекаются на продолжении его диагонали BD. Докажите, что произведения противоположных сторон этого четырёхугольника равны.

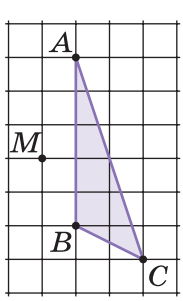
21. ★★☆ Точки A и B находятся в одной полуплоскости относительно прямой l. Постройте окружность, проходящую через A и B и касающуюся этой прямой. Сколько может быть таких окружностей? (▸▸ рис.)

22. ★★☆ На отрезке AC взята точка B. По одну сторону от прямой AC на отрезках AB и AC как на диаметрах построены полуокружности. К отрезку AC в точке B проведён перпендикуляр BD до пересечения с большей из полуокружностей в точке D, а из точки C проведена касательная CK к меньшей из них. Докажите, что $CD = CK$. (▸▸ рис.)

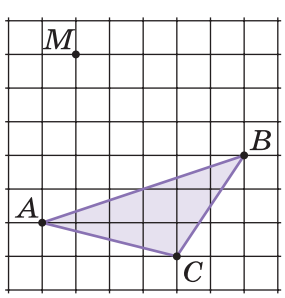
23. ★★☆ Верно ли, что окружность, проходящая через точки A, B и C на рисунке, также пройдёт и через точку M? (▸▸ рис.)

24. ★★☆ Докажите, что углы ACB и ADB на рисунке равны. (▸▸ рис.)

а)

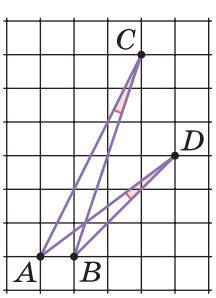


б)

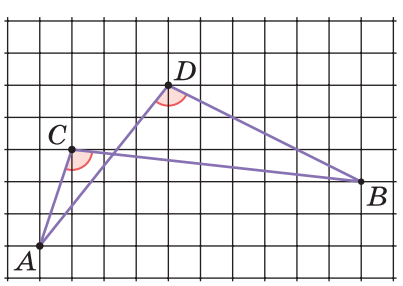


задача 23

а)

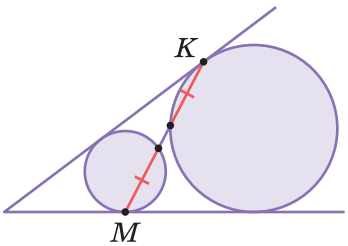


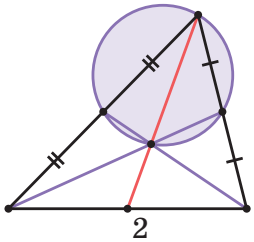
б)

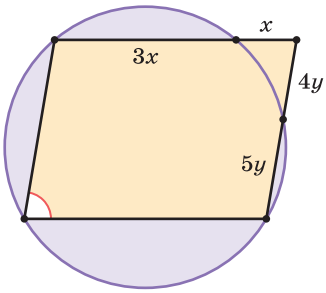


задача 24

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021







задача 25

задача 26

задача 27

25. ★★☆ В угол вписаны две окружности. Первая касается одной стороны угла в точке M, вторая касается другой стороны в точке K. Докажите, что на прямой MK эти окружности высекают равные хорды. (▸▸ рис.)

26. ★★☆ Середины двух сторон треугольника, точка пересечения его медиан и одна вершина лежат на окружности. Найдите длину медианы, выходящей из этой вершины, если противоположная сторона треугольника равна 2. (▸▸ рис.)

27. ★★☆ Окружность проходит через три вершины параллелограмма и делит две его стороны в отношениях 1 : 3 и 4 : 5, считая от общей вершины. Найдите косинус острого угла параллелограмма. (▸▸ рис.)

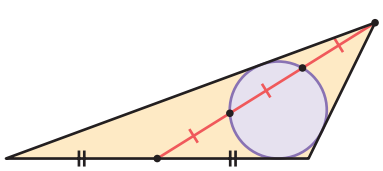
28. ★★☆ Медианы, проведённые к боковым сторонам равнобедренного треугольника, пересекают описанную около него окружность в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ, если боковые стороны треугольника равны a, а его основание равно b.

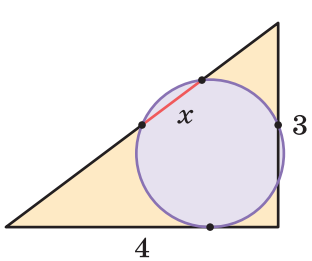
29. ★★☆ Окружность, вписанная в треугольник, делит его медиану на три равные части. Найдите отношение сторон треугольника. (▸▸ рис.)

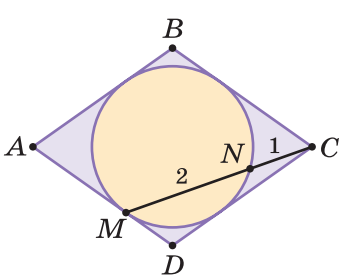
30. ★★☆ Окружность, касающаяся большего катета египетского треугольника, проходит через середины двух других его сторон. Найдите длину отрезка x, который она высекает на гипотенузе. (▸▸ рис.)

31. ★★☆ В ромб $ABCD$ вписана окружность, касающаяся стороны AD в точке M. Отрезок CM пересекает данную окружность в точке N. Известно, что $CN = 1$, $MN = 2$. Найдите меньшую диагональ ромба. (▸▸ рис.)

32. ★★☆ В равнобедренном треугольнике ABC провели биссектрису CL угла при его основании. На луче AC отложили отрезок AK, равный BL. Докажите, что точки B, L, K и C лежат на одной окружности.





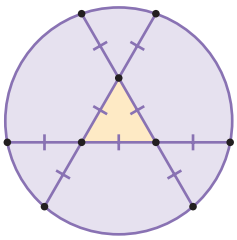


задача 29

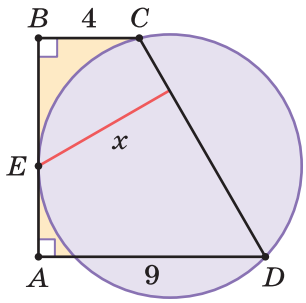
задача 30

задача 31

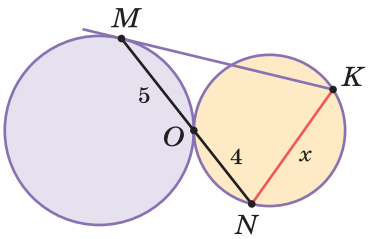
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 33



задача 34



задача 35

33. ★★☆ В окружности радиуса 7 провели три равные хорды так, что каждая делится двумя другими на три равные части. Найдите длины этих хорд. (▸▸ рис.)

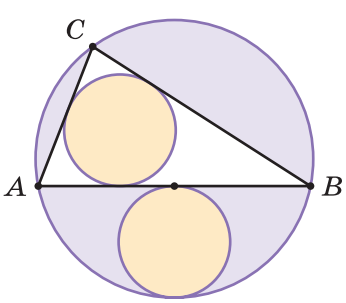
34. ★★☆ В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $BC = 4$, $AD = 9$. (▸▸ рис.)

35. ★★☆ Две окружности касаются внешним образом в точке O. Прямая касается первой окружности в точке M и пересекает вторую в точке K. Прямая MO пересекает вторую окружность в точке N. Найдите отрезок KN, если $MO = 5$, а $NO = 4$. (▸▸ рис.)

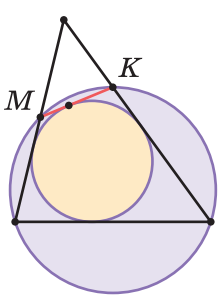
36. ★★☆ Хорда AB разбивает окружность на два сегмента. В меньший из сегментов вписали вторую окружность, касающуюся хорды AB в середине. На дуге большего сегмента взяли такую точку C, что вписанная окружность треугольника ABC равна второй окружности. Найдите периметр треугольника ABC, если $AB = 2$. (▸▸ рис.)

37. ★★☆ Боковые стороны треугольника равны a и b, а его основание — c. Окружность проходит через вершины основания и вторично пересекает боковые стороны в точках M и K. Найдите длину отрезка MK, если известно, что он касается вписанной в треугольник окружности. (▸▸ рис.)

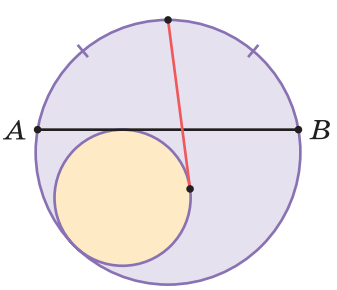
38. ★★☆ Хорда AB разбивает круг на два сегмента. В один из них вписали произвольную окружность. Докажите, что длина касательной к этой окружности, проведённой из середины дуги другого сегмента, не зависит от выбора вписанной в сегмент окружности. (▸▸ рис.)



задача 36

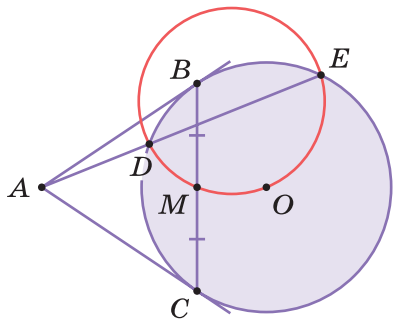


задача 37

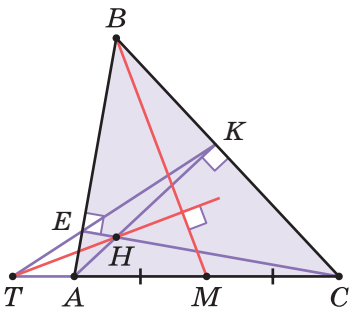


задача 38

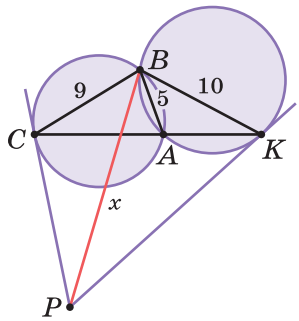
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021



задача 39



задача 42



задача 43

39. ★★☆ Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности с центром в точке O и секущая, пересекающая окружность в точках D и E; точка M — середина отрезка BC. Докажите, что точки M, O, D и E лежат на одной окружности. (▸▸ рис.)

40. ★★★ Продолжения противоположных сторон вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q. Пусть K и N — середины его диагоналей. Докажите, что сумма углов PKQ и PNQ равна 180°.

41. ★★★ В прямоугольном треугольнике на гипотенузу опустили высоту. Из её основания на катет опустили перпендикуляр. Через полученную точку и концы гипотенузы провели окружность. В каком отношении она делит высоту треугольника?

42. ★★★ Высоты AK и CE треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые KE и AC пересекаются в точке T. Докажите, что прямая HT перпендикулярна медиане BM треугольника ABC. (▸▸ рис.)

43. ★★★ Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A провели прямую, вторично пересекающую окружности в точках C и K. В этих точках к окружностям провели касательные, которые пересеклись в точке P. Найдите отрезок BP, если $AB = 5$, $BC = 9$, $BK = 10$. (▸▸ рис.)

44. ★★★ Около треугольника ABC описана окружность и в него же вписана окружность, которая касается сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямая B_1C_1 пересекает прямую BC в точке P, а точка M — середина отрезка PA_1. Докажите, что отрезки касательных, проведённых из точки M к вписанной и описанной окружности, равны.

45. ★★★ *(Формула Эйлера.)* Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, d — расстояние между их центрами. Докажите, что $d^2 = R^2 - 2rR$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2021

3 ГЛАВА

Векторы и координаты

§7. Векторы

§8. Базис векторов. Скалярное произведение

§9. Метод координат

§10. Длина окружности и площадь круга



§7 Векторы

Зачем нужны стрелки?

Математика до некоторого времени обходилась величинами, которые можно записывать с помощью одного числа. Например, только одним числом можно обозначить количество предметов, массу, длину отрезка или площадь фигуры. Такие величины теперь называют *скалярными*. Однако стремительное развитие физики в XVII–XIX веках потребовало от математики создания новых методов и моделей для таких понятий, как перемещение, сила, скорость или ускорение. Ясно, что наше перемещение в пространстве зависит не только от расстояния между началом и концом пройденного пути, но и от того, куда мы держим путь. Значит, оно зависит и от направления нашего передвижения.

Также важно понимать, куда летит стрела или дует ветер (рис. 1). Скорость тоже имеет не только величину, но и направление. Например, при движении автомобиля его скорость меняется педалью газа, а направление — с помощью руля (рис. 2).

Сложно представить классическую физику без понятия силы. А ведь любая сила тоже имеет свою величину и направление. Чтобы забить в доску гвоздь, нужно ударить по нему молотком вдоль линии этого гвоздя, то есть подействовать на него силой в определённом направлении. Иначе гвоздь просто согнётся (рис. 3). То же самое можно сказать и о футбольном мяче: чтобы забить гол, нужно ударить по мячу в направлении ворот.

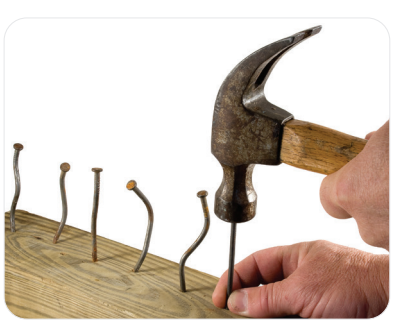
Изменение скорости и ускорение, получаемое предметом, связано с действующей на этот предмет силой по закону Ньютона. Сила может менять направление скорости, даже не меняя её величины. Так происходит, когда привязанный к верёвке груз равномерно вращается по окружности или космический спутник движется вокруг Земли.

Все эти примеры показывают, что силу, скорость или перемещение невозможно задать только одним числом. Для



Рис. 1


Рис. 2


Рис. 3

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

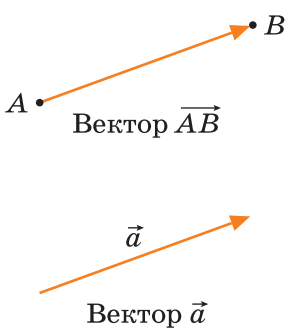
каждого из них необходимо знать два параметра: величину и направление. И удобной геометрической моделью каждого из этих понятий стал *направленный отрезок* или просто стрелка. Стрелки для обозначения сил, действующих на предметы, впервые стал использовать голландский учёный Симон Стевин ещё в конце XVI века. Но лишь в середине XIX века ирландский математик Уильям Гамильтон создал теорию таких стрелок и назвал их векторами. Термин *вектор* был образован им от латинского слова *vector*, что переводится как «переносящий». Это совершенно естественно, поскольку с помощью вектора определяется такое важное движение плоскости, как параллельный перенос. О нём мы с вами поговорим в конце этого года. А сейчас давайте дадим определение вектора.



Уи́льям Ро́уэн Га́мильтон
(1805 – 1865)

Вектором или направленным отрезком называют отрезок, у которого указан порядок его концов: один из них считается началом вектора, а другой — концом. Например, вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет своё начало в точке A и конец в точке B.
Часто вектор обозначают одной маленькой буквой, но обязательно ставят над ней стрелку.

Длиной или **модулем вектора** $\overrightarrow{AB}$ называют длину отрезка AB. Модуль вектора обозначают так: $|\overrightarrow{AB}|$. Если же вектор обозначен одной маленькой буквой, то его модуль записывают так же, как модуль числа. Например, модуль вектора $\vec{a}$ обозначают так: $|\vec{a}|$.



Вектор обозначают стрелкой, направленной от его начала к концу. При записи направленного отрезка важен порядок его вершин: векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ — это разные векторы.

УПРАЖНЕНИЕ

1. По прогнозу погоды на 1 января в Москве ожидается сильная метель, 5 градусов мороза, юго-западный ветер с порывами до 20 м/с, влажность воздуха 90 % и атмосферное давление около 740 мм рт. ст. Какие из перечисленных величин в этом прогнозе скалярные, а какие — векторные?



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Направление

Модуль вектора силы или вектора скорости соответственно показывает величину этой силы или скорости. А вот направление вектора должна показывать сама изображающая его стрелка. Например, стрелка компаса показывает направление на север, а стрелка флюгера — направление ветра. Но что такое направление? Какие направления можно считать одинаковыми? Понятие направления для человека очевидно. Ведь никто не будет думать, что две пересекающиеся дороги идут в одном направлении. Поэтому на перекрёстке перед выбором направления движения иногда можно прочитать и такое: «Направо пойдёшь, голову сложишь, налево — коня потеряешь» (рис. 4). Даже по одной прямой можно идти в двух противоположных направлениях. Значит, направление показывает не сама прямая, а лежащий на ней луч.



Рис. 4
Картина Виктора Васнецова *«Витязь на распутье»*

Когда два луча имеют одно направление? Давайте подумаем. Сначала представим себе две машины, которые друг за другом по прямой дороге едут в одну сторону. Тогда луч, показывающий направление движения первой машины, должен целиком принадлежать такому же лучу второй машины. А если две машины едут по параллельным дорогам в одном направлении, то лучи направления их движения всё время должны находиться по одну сторону от прямой, которая соединяет две эти машины (рис. 5). В противном случае направления их движения можно считать противоположными.

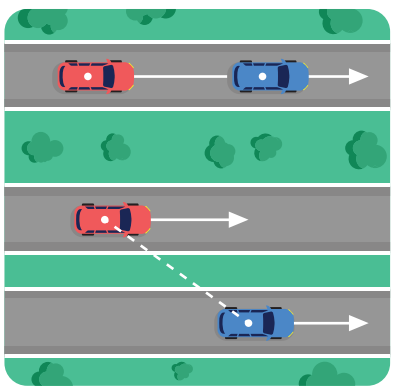
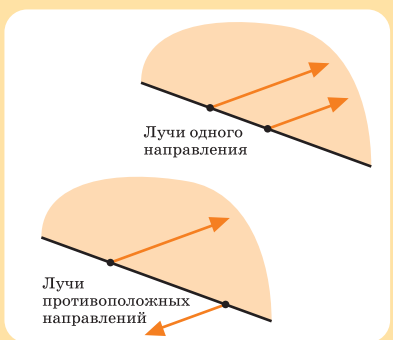


Рис. 5

Нарисуем теперь на луче стрелку, выходящую из его начала. Очевидно, что за направление этой стрелки можно принять данный луч. Это позволяет нам дать определение векторов, имеющих одно направление.

Два вектора, не лежащие на одной прямой, **имеют одно направление**, если они параллельны друг другу и находятся по одну сторону от прямой, проходящей через их начала.

Два вектора **имеют противоположные направления**, если они параллельны друг другу и находятся по разные стороны от прямой, проходящей через их начала.



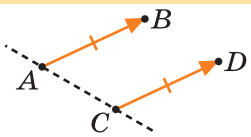
Понятие направления обладает транзитивностью, как и понятие равенства фигур или параллельности прямых. И доказать это можно, пользуясь данным определением.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Равенство векторов

Для построения теории векторов очень важно понимать, какие из них можно считать равными друг другу. Поскольку любой вектор имеет свою величину и направление, то логично считать равными именно те из них, у которых совпадают эти характеристики. Давайте запишем это как определение равных векторов.

Два вектора называют **равными**,
если они имеют равные длины и одно направление.



Из определения сразу следует, что на плоскости существует целый класс векторов, равных данному вектору. Более того, равный данному вектор можно отложить от любой точки плоскости. Поэтому векторы, для которых понятие равенства определено таким образом, называют свободными*.

Свободные векторы служат хорошей моделью для сил, действующих на предметы, размерами которых можно пренебречь. Они удобны и для описания скоростей при переходе в движущуюся систему отсчёта. В основном курсе геометрии все векторы мы будем считать свободными.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Пользуясь рисунком 6, поясните, почему от любой точки C на плоскости можно отложить вектор, равный данному вектору $\overrightarrow{AB}$.

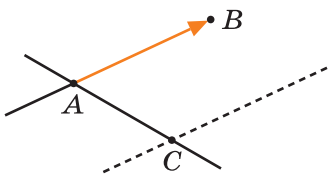


Рис. 6

3. Дан параллелограмм $ABCD$. Укажите все пары равных векторов с концами в его вершинах. Сколько всего будет таких пар?

4. На клетчатой бумаге показаны векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (рис. 7). Отложите равные им векторы от точки M. Каким будет расстояние между концами отложенных так векторов? Сторону клетки можно принять за 1.

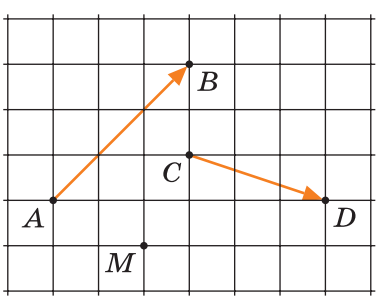


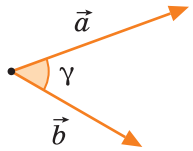
Рис. 7

* Для изображения сил, действующих на различные точки твёрдого тела, свободные векторы не подходят. В таких случаях обычно используют «закреплённые» векторы, у каждого из которых начало находится в своей точке. Так делают потому, что для движения твёрдого тела имеет значение, на какую его точку действует данная сила. Впрочем, для описания движения твёрдого тела часто используют и «скользящие» векторы. Такие векторы считают равными, когда у них совпадают длина и направление, при условии, что сами эти векторы лежат на одной прямой.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Угол между векторами

Если два вектора имеют разные направления и выходят из одной точки, то они образуют угол с вершиной в этой точке (рис. 8). Сторонами такого угла являются лучи, на которых лежат данные векторы. Чтобы найти угол между векторами, не имеющими общего начала, нужно просто отложить равные им векторы от любой точки. Тогда угол между ними считают равным углу между данными двумя векторами. Можно доказать, что этот угол не зависит от выбора точки, от которой отложены векторы. Угол между векторами может быть острым, прямым или тупым, но не может превосходить 180°. Так же считают, что угол между двумя векторами одного направления условно равен 0°.



Угол между векторами не превосходит 180°

Рис. 8

УПРАЖНЕНИЕ

5. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, показанными на каждом из рисунков (рис. 9).

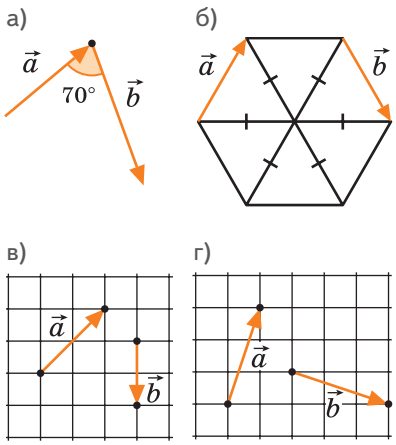


Рис. 9

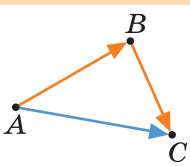
Сложение векторов

Как правильно сложить два вектора или две стрелки? Проще всего это понять на примере вектора перемещения. Представим, что из точки A сначала мы переместились в точку B, а уже потом из точки B — в точку C. Куда из точки A мы переместились в итоге? Ясно, что мы окажемся в точке C. Значит, сумма векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ наших перемещений равна вектору $\overrightarrow{AC}$. Коротко это можно записать так: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Данное правило сложения векторов называют *правилом треугольника*. Мы примем его без доказательства, как аксиому.

ПРАВИЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

Для любых трёх точек A, B и C выполняется равенство: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Данное равенство верно именно для векторов или направленных отрезков. Для обычных отрезков оно не выполняется, поскольку для них справедливо известное вам неравенство треугольника.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Правило треугольника позволяет получить сумму двух векторов, когда начало одного из них совпадает с концом другого. Можно сказать, что такие векторы образуют цепочку, или ломаную, состоящую из двух стрелок. Если обозначить данные векторы буквами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то их суммой $\vec{a} + \vec{b}$ будет вектор, идущий из начала в конец этой цепочки (рис. 10).

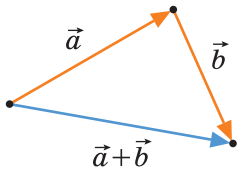


Рис. 10

А как складывать векторы, которые не образуют цепочки? Наверное, вы уже догадались: вектор, равный одному из них, нужно просто отложить от конца другого.

УПРАЖНЕНИЯ

6. На клетчатой бумаге показаны векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (рис. 11). Постройте вектор, равный: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$. Найдите модуль каждой из этих сумм, если сторона клетки равна 1.

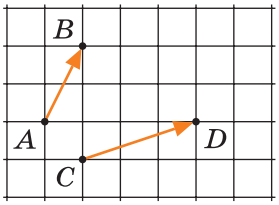


Рис. 11

7. На клетчатой бумаге показан треугольник ABC (рис. 12). Найдите модуль вектора а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$. Сторона одной клетки равна 1.

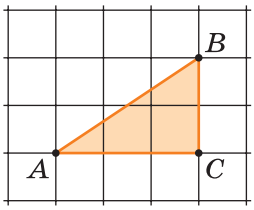


Рис. 12

8. На клетчатой бумаге показаны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 13). Постройте вектор, равный сумме этих векторов. Найдите $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$, если сторона клетки равна 1.

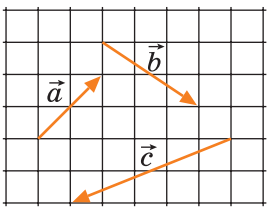


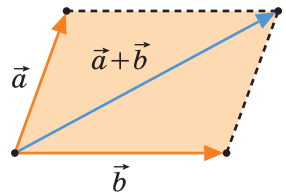
Рис. 13

В механике часто бывает, что сразу несколько сил действуют на одну точку. Именно такую ситуацию описал Иван Андреевич Крылов в своей знаменитой басне, в которой «Лебедь рвётся в облака, Рак пятится назад, а Щука тянет в воду». Векторы, выходящие из одной точки, неудобно складывать по правилу треугольника. Для этого существует ещё одно правило — правило параллелограмма. Давайте тоже с ним познакомимся.



ПРАВИЛО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Чтобы сложить два вектора, выходящих из одной точки и не лежащих на одной прямой, нужно построить параллелограмм, сторонами которого служат эти векторы. Тогда их суммой будет вектор, идущий из той же точки в противоположную вершину этого параллелограмма.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выходят из одной точки O и не лежат на одной прямой. Обозначим их концы соответственно точками A и B и проведём через них прямые, параллельные данным векторам. Пусть эти две прямые пересекаются в точке C. Тогда четырёхугольник $OACB$ будет параллелограммом по определению (рис. 14).

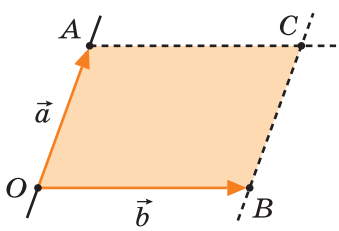


Рис. 14

Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеют одно направление и равные длины по свойству параллелограмма. Значит, вектор $\overrightarrow{AC}$ равен вектору $\vec{b}$.

Но по правилу треугольника $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$. Поэтому $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 15). Таким образом, сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна вектору $\overrightarrow{OC}$ диагонали параллелограмма, выходящей из одной с ними точки.

Что и требовалось доказать.

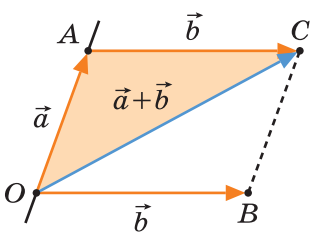


Рис. 15

Мы с вами научились складывать два любых вектора. А как сложить три или пять векторов? Имеет ли значение, в каком порядке их нужно складывать?

Когда вы учились в начальной школе, то складывали числа. И с тех пор наверняка запомнили важное правило: *от перемены мест слагаемых сумма чисел не меняется*. Более того, с начальной школы вы умеете складывать не только два, но и большее количество чисел. Складывать их можно в любом порядке. Например, для того чтобы получить сумму чисел 1, 2 и 3, сначала можно сложить 1 и 2, а потом прибавить к ним 3. А можно наоборот: сложить 1 и 3 и потом прибавить к ним 2. Конечно, сумма трёх чисел от этого не изменится. Поэтому мы и записываем эту сумму так: 1 + 2 + 3.

А как устроены векторы в смысле их сложения друг с другом? Можете быть уверены: в смысле операции сложения векторы устроены совершенно так же, как числа. Давайте запишем это как свойства сложения векторов.

Два вектора перпендикулярны друг другу, а их модули равны 6 и 8. Чему равен модуль суммы таких векторов?

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1. Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно равенство: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. *Переместительный закон*

2. Для любых трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ верно равенство: $(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b}+\vec{c})$. *Сочетательный закон*

Мы сформулировали переместительный и сочетательный законы сложения векторов соответственно для двух и трёх произвольных векторов. На самом деле они верны для любого их количества. То есть в смысле сложения векторы ничем не отличаются от обычных чисел. А вывести это можно из двух данных свойств сложения векторов.

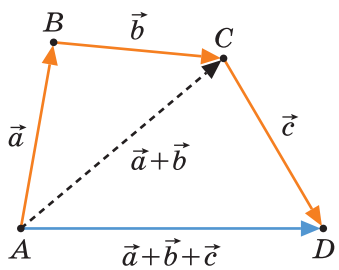


Рис. 16

УПРАЖНЕНИЯ

9. Докажите переместительный закон сложения для двух векторов, не лежащих на одной прямой.

10. Докажите сочетательный закон сложения для трёх векторов, не лежащих на одной прямой (рис. 16).

11. Для любых ли векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ верно, что $(\vec{a}+\vec{c}) + \vec{b} = (\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c}$?

12. На клетчатой бумаге показаны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 17). Найдите модуль суммы этих векторов, если сторона клетки равна 1.

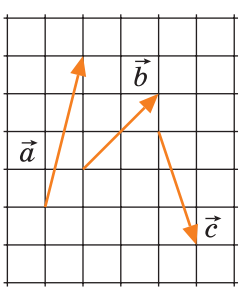


Рис. 17

13. На клетчатой бумаге показаны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ (рис. 18). Найдите модуль суммы всех этих векторов, если сторона клетки равна 1.

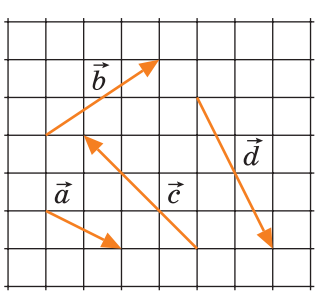


Рис. 18

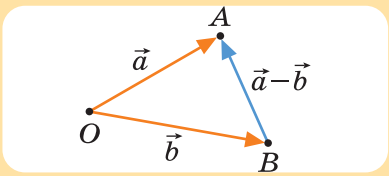
Разность двух векторов

Мы с вами научились складывать векторы друг с другом. А как же их вычитать? Давайте здесь тоже проведём аналогию с обычными числами. Вспомним, что такое разность чисел 5 и 3. Это такое число, которое в сумме с 3 даёт 5. Примерно так же можно определить и разность двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: это должен быть такой вектор, который в сумме с вектором $\vec{b}$ даст вектор $\vec{a}$. Запишем это как определение.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, для которого $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

Разность векторов записывают так же, как разность чисел: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.



Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выходят из одной точки, то вектор их разности $\vec{a} - \vec{b}$ соединяет концы двух этих векторов. Посмотрите на рисунок: на нём показаны векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, выходящие из точки O. По правилу треугольника должно быть $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$.

Это значит, что $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$. То есть вектор $\overrightarrow{BA}$ равен разности $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если от числа отнять это же число, то получится ноль. А что будет, если от вектора отнять сам этот вектор? Давайте от вектора $\overrightarrow{OA}$ отнимем тот же вектор $\overrightarrow{OA}$. Тогда мы получим вектор, у которого совпадают начало и конец, то есть точку. Вот почему точку называют **нуль-вектором** и обозначают его так: $\vec{0}$.

Нуль-вектор, очевидно, имеет нулевую длину, но не имеет определённого направления. А среди векторов он выполняет ту же самую функцию, что и обычный нуль для чисел: прибавление нуль-вектора к любому другому вектору ничего не меняет, то есть для любого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

УПРАЖНЕНИЯ

14. На клетчатой бумаге показаны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите модуль разности этих векторов, если сторона клетки равна 1 (рис. 19).

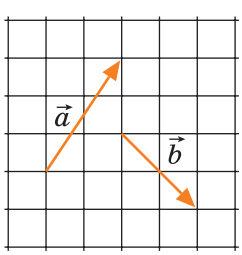


Рис. 19

15. Два ненулевых вектора имеют равные длины, а модуль разности этих векторов равен длине каждого из них. Найдите угол между данными векторами.

16. Модуль суммы двух ненулевых векторов равен модулю их разности. Найдите угол между этими векторами.

Противоположные векторы

Два числа называют противоположными, если их сумма равна нулю. Точно так же и два вектора называют противоположными, если их сумма равна точке или нуль-вектору. Как могут быть расположены такие векторы друг относи-

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

тельно друга? Давайте подумаем: пусть сумма вектора $\overrightarrow{AB}$ и некоторого второго вектора равна нуль-вектору. Если мы отложим этот второй вектор от точки B, то нуль-вектор получим только тогда, когда вернёмся в исходную точку A. Значит, в этом случае противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$ будет вектор $\overrightarrow{BA}$. То есть, просто поменяв местами начало и конец вектора, мы получим противоположный ему вектор (рис. 20, *а*). Отсюда следует, что противоположные векторы должны иметь равную длину и противоположные направления. А если мы отложим такие векторы от одной точки, то угол между ними будет равен 180° (рис. 20, *б*). Как раз по этому принципу на числовой прямой все мы привыкли откладывать и противоположные числа: векторы, идущие к противоположным числам из нуля, всегда противоположны (рис. 20, *в*).

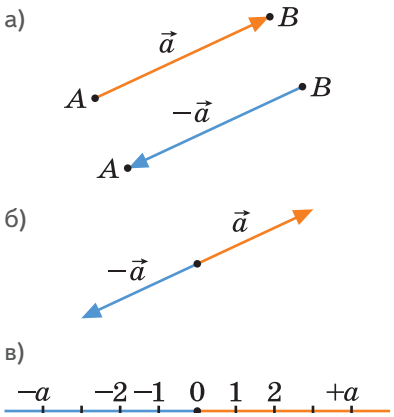


Рис. 20

УПРАЖНЕНИЯ

17. На клетчатой бумаге показаны вектор $\overrightarrow{AB}$ и точка C (рис. 21). Отложите от точки C вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{AB}$. Найдите расстояние между концами этих векторов, если сторона одной клетки равна 1.

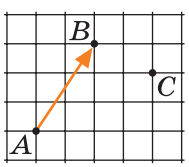


Рис. 21

18. Из курса алгебры мы с вами знаем, что разность любых двух чисел всегда можно записать как сумму первого из этих чисел и числа, противоположного второму. То есть для любых чисел a и b верно, что $a - b = a + (-b)$. Пользуясь рисунком, сформулируйте и докажите это же правило для двух векторов (рис. 22).

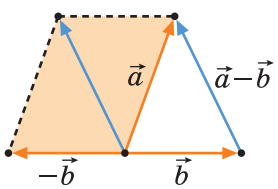


Рис. 22

19. Какой из векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ или $\overrightarrow{OE}$ в сумме с векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ даёт $\vec{0}$ (рис. 23)?

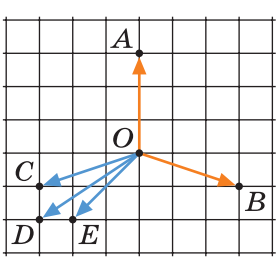


Рис. 23

Правило замкнутой цепочки

Если несколько векторов следуют друг за другом и при этом образуют замкнутую цепочку, то их сумма равна нулю. Строго это можно вывести из пройденных уже нами свойств сложения векторов. Но свойство замкнутой цепочки станет совсем очевидным, если вспомнить, что любой вектор является моделью обычного перемещения. В самом деле, если мы вышли из пункта A, побывали в других местах, а потом вернулись обратно в точку A, то результат нашего перемещения должен быть равен нулю (рис. 24).

Оказывается, что верно и обратное утверждение, которое мы назовём *правилом замкнутой цепочки*.

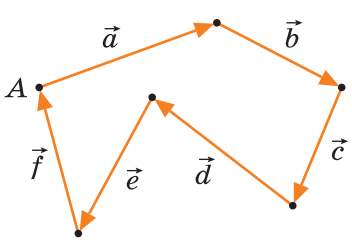


Рис. 24

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ПРАВИЛО ЗАМКНУТОЙ ЦЕПОЧКИ

Если сумма нескольких векторов равна нулю, то из них можно составить замкнутую цепочку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть сумма векторов $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots + \vec{f}$ равна нулю. Составим из них цепочку: отложим от любой точки A вектор $\vec{a}$, от его конца отложим вектор $\vec{b}$, от конца вектора $\vec{b}$ отложим вектор $\vec{c}$ и т. д.

Дальше будем рассуждать от противного. Предположим, что построенная нами цепочка векторов окажется незамкнутой, то есть конец последнего вектора $\vec{f}$ цепочки не попадёт в точку A и окажется в какой-то другой точке B (рис. 25). Давайте добавим к нашей цепочке вектор $\overrightarrow{BA}$. Он замкнёт эту цепочку, и тогда по свойству замкнутой цепочки должно быть: $\overrightarrow{BA} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots + \vec{f} = \vec{0}$.

По условию же нам дано, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots + \vec{f} = \vec{0}$. Поэтому $\overrightarrow{BA} = \vec{0}$. Но это невозможно для различных точек A и B. Мы получили противоречие. Значит, из векторов, сумма которых равна нулю, можно составить замкнутую цепочку.

Что и требовалось доказать.

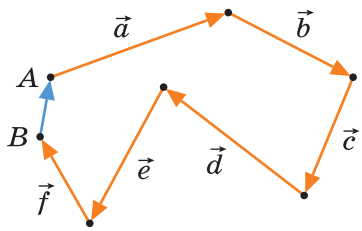


Рис. 25

УПРАЖНЕНИЯ

20. Сумма трёх векторов равна нулю. Найдите углы между этими векторами, если все они имеют равную длину.

21. На сторонах треугольника построили три параллелограмма (рис. 26). Найдите сумму $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ векторов, отмеченных на этом рисунке.

22. Докажите, что из диагоналей произвольного пятиугольника можно составить второй пятиугольник со сторонами, параллельными диагоналям первого пятиугольника.

23. Сумма четырёх ненулевых векторов одинаковой длины равна нулю. Верно ли, что среди них есть две пары противоположных векторов?

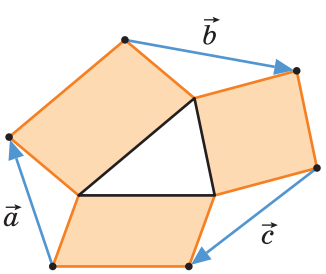


Рис. 26

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Умножение вектора на число

Иногда говорят, что умножение чисел — это сокращённое их сложение. Конечно, такое высказывание больше относится к натуральным числам. Вместо того чтобы десять раз прибавлять одно и то же число, можно просто умножить его на 10. Сделать так удобнее и короче. В математике числа перемножают по одним и тем же правилам. Эти законы одинаковы для любых действительных чисел: положительных и отрицательных, для дробей или квадратных корней. Давайте вспомним эти правила умножения чисел.

1. Для любых чисел a и b верно равенство: $a \cdot b = b \cdot a$. — *Переместительный закон*
2. Для любых чисел a, b и c верно равенство: $(a \cdot b) \cdot c = b \cdot (a \cdot c)$. — *Сочетательный закон*
3. Для любых чисел a, b и c верно равенство: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. — *Правило раскрытия скобок*
4. Для любого числа a верно равенство: $a \cdot 0 = 0$. — *Умножение на ноль*

Векторы тоже можно умножать на действительные числа. Давайте, например, умножим вектор $\vec{a}$ на число 3. Точно так же, как мы это делали с числами, для векторов можно записать: $3 \cdot \vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ (рис. 27, *а*). Ясно, что длина вектора $3 \cdot \vec{a}$ в три раза больше длины вектора $\vec{a}$ и направлены они в одну сторону. А что будет, если умножить тот же вектор $\vec{a}$ на число (-2)? По той же аналогии мы должны получить, что $(-2) \cdot \vec{a} = -\vec{a} - \vec{a}$. Значит, вектор $-2 \cdot \vec{a}$ должен быть в два раза длиннее вектора $\vec{a}$, но направлен в противоположную от него сторону (рис. 27, *б*). Эти примеры ясно показывают, как можно определить умножение вектора на действительное число k.

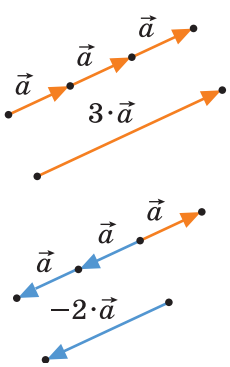
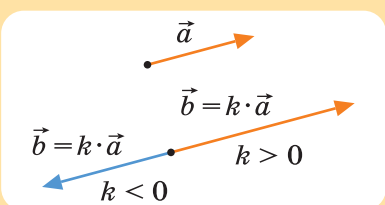


Рис. 27

Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число $k \neq 0$ называют такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

- одинаково направлены при $k > 0$;
- противоположно направлены при $k < 0$.



Умножение векторов на числа обладает почти теми же свойствами, что и умножение обычных чисел. Единственная разница между ними состоит в том, что векторы мы пока не будем умножать друг на друга. Наверное, было

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

бы естественно определить произведение двух векторов тоже как вектор. Но, увы, на плоскости невозможно сделать это так, чтобы для данных произведений выполнялись правила раскрытия скобок. Поэтому произведение двух векторов мы с вами определим не как вектор, а как число, но в следующем параграфе. А сейчас давайте приведём свойства умножения вектора на действительное число.

СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

1. Для любого вектора $\vec{a}$ и числа k верно равенство: $k \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot k$. — *Переместительный закон*
2. Для любого вектора $\vec{a}$ и чисел k и l верно равенство: $k \cdot (l \cdot \vec{a}) = (k \cdot l) \cdot \vec{a}$. — *Сочетательный закон*
3. Для любого вектора $\vec{a}$ и чисел k и l верно равенство: $(k + l) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{a}$. — *Правило раскрытия скобок*
4. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и числа k верно равенство: $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$. — *Правило раскрытия скобок*
5. Для любого вектора $\vec{a}$ верно равенство: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$. — *Умножение на ноль*

☞ Среди свойств умножения вектора на число мы написали не одно, а два правила раскрытия скобок. Почему мы так сделали? Дело в том, что входящие в эти произведения множители не равноправны: один из них — вектор, а другой — число.

Почти все выписанные нами свойства умножения вектора на число сразу следуют из свойств действительных чисел. Правильнее сказать: все, кроме одного. Одно из них является следствием подобия треугольников. Можете вы сразу сказать, какое это свойство? Пока подумайте над этим вопросом, а тем временем мы посмотрим, почему выполняется второе свойство умножения вектора на число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СВОЙСТВА 2

Заметим, что векторы $k \cdot (l \cdot \vec{a})$ и $(k \cdot l) \cdot \vec{a}$ имеют одну длину $|k| \cdot |l| \cdot |\vec{a}|$. Нам нужно лишь проверить, что у них совпадают направления. Разберём несколько случаев. Пусть, например, числа k и l имеют один знак. Тогда их произведе-

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ние положительно и направления векторов $(k \cdot l) \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$ совпадают по определению. А что будет с направлением вектора $k \cdot (l \cdot \vec{a})$? Если числа k и l положительны, то направления векторов $\vec{a}$, $l \cdot \vec{a}$ и $k \cdot (l \cdot \vec{a})$ совпадают.

Если же оба числа k и l отрицательны, то при умножении сначала на число l, а потом на число k вектор $\vec{a}$ два раза поменяет своё направление (рис. 28). В результате вектор $k \cdot (l \cdot \vec{a})$ будет направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$. Таким образом, и в этом случае векторы $k \cdot (l \cdot \vec{a})$ и $(k \cdot l) \cdot \vec{a}$ будут иметь равную длину и одинаковое направление. Значит, они равны.

Что и требовалось доказать.

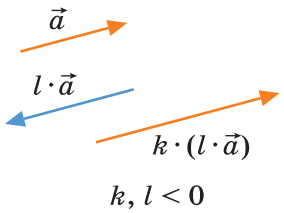


Рис. 28

Случай, когда числа k и l имеют разные знаки, разбирается точно так же.

Наверное, вы уже догадались, что с подобием треугольников связано свойство 4. Оно представляет собой правило раскрытия скобок при умножении суммы двух векторов на число k. Давайте его докажем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СВОЙСТВА 4

Будем считать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не параллельны, и разберём случай, когда число $k > 0$. Тогда векторы $\vec{a}$ и $k \cdot \vec{a}$ по определению будут иметь одинаковые направления. Отложим их от одной точки O и обозначим концы этих векторов соответственно A и A_1. Теперь от этих точек отложим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, равные соответственно векторам $\vec{b}$ и $k \cdot \vec{b}$ (рис. 29). Тогда по правилу сложения векторов мы получим, что $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$. Что означает правило раскрытия скобок $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$? Оно означает, что $k \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1}$. Мы с вами это сейчас и докажем.

Поскольку $\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ и $k > 0$, то векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{AB}$ имеют одно направление. Значит, прямые AB и A_1B_1 параллельны, поэтому углы OAB и OA_1B_1 равны как соответственные при параллельных и секущей AA_1. Кроме того, из определения умножения вектора на число следует, что $\dfrac{OA_1}{OA} = \dfrac{A_1B_1}{AB} = k$.

Значит, треугольники OAB и OA_1B_1 подобны по второму признаку подобия треугольников. А поскольку эти треугольники подобны, то все их соответственные углы должны быть равны. Поэтому угол AOB равен углу A_1OB_1. Это значит, что точка B_1 лежит на луче OB и векторы $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеют одно направление.

Из подобия треугольников OAB и OA_1B_1 также следует, что $\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{OB}$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{OB_1}$ равен вектору $\overrightarrow{OB}$, умноженному на число k.

Поэтому $k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

Что и требовалось доказать.

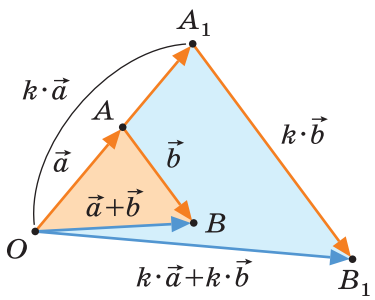


Рис. 29

Случай $k < 0$ разбирается аналогично. Сделайте это самостоятельно.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

УПРАЖНЕНИЯ

24. Докажите правило раскрытия скобок при умножении суммы двух векторов на число $k < 0$ (рис. 30).

25. Найдите на клетчатой бумаге длину вектора $4\vec{a} - \vec{b}$, если сторона клетки равна 1 (рис. 31).

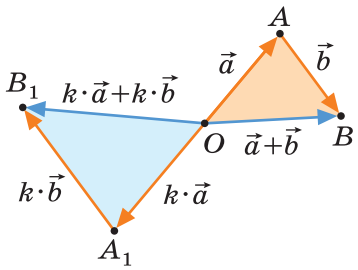


Рис. 32

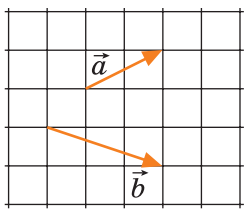
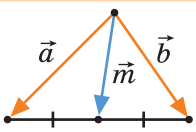


Рис. 30

При решении геометрических задач часто помогают специальные приёмы для группировки векторов. И первый из них связан с вектором, идущим из вершины треугольника в середину его противоположной стороны. Такой вектор мы будем называть *вектором медианы* треугольника.

ВЕКТОР МЕДИАНЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Вектор медианы треугольника равен половине суммы векторов его сторон, выходящих из той же вершины: $\vec{m} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Возьмём произвольный треугольник ABC и обозначим векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ двух его сторон как $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{CM}$ медианы этого треугольника, выходящей из той же вершины, обозначим $\vec{m}$.

Сделаем дополнительное построение: продлим медиану CM за точку M на свою длину до точки D (рис. 32). Тогда вектор $\overrightarrow{CD}$ будет иметь то же направление, что и вектор $\vec{m}$, но в два раза большую длину. Поэтому $\overrightarrow{CD} = 2\vec{m}$.

Четырёхугольник $ACBD$ будет параллелограммом по признаку, поскольку его диагонали делятся точкой M пополам. По правилу параллелограмма сложения векторов имеем: $\overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{b}$. Следовательно, $2\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$.

Откуда $\vec{m} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

Что и требовалось доказать.

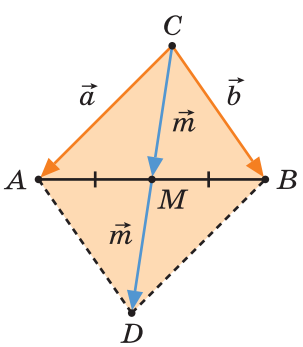


Рис. 31

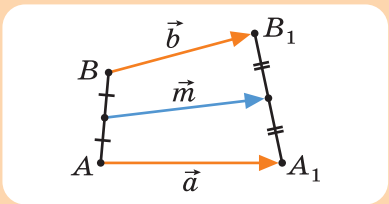
УПРАЖНЕНИЕ

26. Внутри параллелограмма $ABCD$ взяли произвольную точку O. Верно ли, что всегда $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$?

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ВЕКТОР, СОЕДИНЯЮЩИЙ СЕРЕДИНЫ ОТРЕЗКОВ

Вектор, идущий из середины отрезка AB в середину отрезка A_1B_1, равен половине суммы векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$, соединяющих концы этих отрезков: $\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.



Данное утверждение замечательно своей общностью — для него не имеет никакого значения, как расположены данные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$: они могут пересекаться, могут не иметь общих точек, а могут вообще лежать на одной прямой. Также не имеет значения, пересекаются ли векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ (рис. 33). Такая общность очень характерна для утверждений, связанных с векторами.

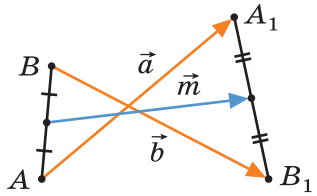


Рис. 33

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим середины отрезков AB и A_1B_1 соответственно буквами O и O_1. Поскольку точка O — середина отрезка AB, то векторы $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ противоположны, и мы можем обозначить их как $\vec{p}$ и $-\vec{p}$. Также противоположными будут векторы $\overrightarrow{B_1O_1}$ и $\overrightarrow{A_1O_1}$, которые мы обозначим как $\vec{q}$ и $-\vec{q}$ (рис. 34).

Давайте обозначим вектор $\overrightarrow{OO_1}$ буквой $\vec{m}$ и выразим его двумя способами через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$. С одной стороны, вектор $\overrightarrow{OO_1}$ соединяет начало и конец ломаной OBB_1O_1 и равен сумме цепочки составляющих её векторов.

Следовательно, должно выполняться равенство: $\vec{m} = \vec{p} + \vec{b} + \vec{q}$.

С другой стороны, вектор $\vec{m}$ соединяет начало и конец ломаной OAA_1O_1, поэтому $\vec{m} = -\vec{p} + \vec{a} - \vec{q}$.

Давайте сложим два этих векторных равенства. Тогда мы получим, что $2\vec{m} = \vec{p} + \vec{b} + \vec{q} - \vec{p} + \vec{a} - \vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$.

Откуда $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

Что и требовалось доказать.

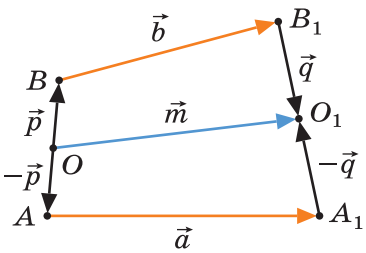


Рис. 34

УПРАЖНЕНИЕ

27. Докажите, что для двух произвольных параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ верно равенство $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{DD_1}$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ВОПРОСЫ

1. Для чего нужны векторы в физике?
2. Чем отличаются векторные величины от скалярных?
3. Что такое вектор? Что называют модулем вектора?
4. Какие лучи имеют одно направление?
5. Какие векторы называют равными друг другу?
6. Всегда ли можно отложить от произвольной точки вектор, равный данному?
7. Что называют углом между двумя векторами?
8. Может ли угол между векторами быть тупым? Может ли он быть больше 180°?
9. Какие правила сложения векторов вы знаете?
10. Какие свойства сложения векторов вам известны?
11. Что такое правило замкнутой цепочки?
12. Какие векторы называют противоположными?
13. Что называют разностью двух векторов?
14. Что называется произведением вектора на действительное число?
15. Какое свойство произведения вектора на действительное число связано с подобием треугольников?
16. Какое вам известно свойство вектора медианы треугольника?
17. Каким свойством обладает вектор, соединяющий середины двух отрезков?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1. ★☆☆ Сумма двух векторов перпендикулярна их разности. Чему равно отношение модулей этих векторов?

РЕШЕНИЕ

Отложим два данных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки O и обозначим их концы точками A и B. Достроим треугольник AOB до параллелограмма $OACB$.

Тогда по правилу параллелограмма сложения векторов $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 35).

А разность $\vec{a} - \vec{b}$ данных векторов будет равна вектору $\overrightarrow{BA}$ другой диагонали этого параллелограмма (рис. 36).

По условию вектор $\vec{a} + \vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a} - \vec{b}$. Это значит, что диагонали $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{BA}$ параллелограмма $OACB$ перпендикулярны друг другу. Но тогда по признаку этот параллелограмм должен быть ромбом. Значит, длины его сторон равны, поэтому равны модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. То есть их отношение равно 1.

Ответ: 1.

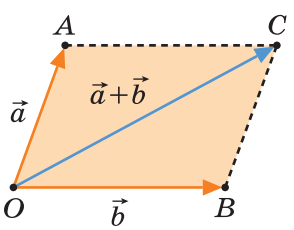


Рис. 35

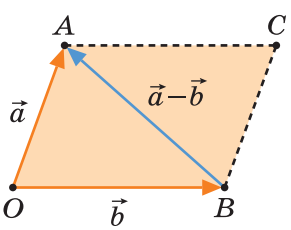
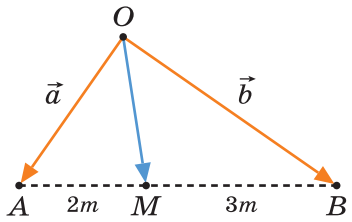


Рис. 36

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ПРИМЕР 2. ★☆☆ Точка M лежит на отрезке AB, причём $AM : MB = 2 : 3$ (рис. 37). Точка O — произвольная. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ соответственно равны $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Выразите вектор $\overrightarrow{OM}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



РЕШЕНИЕ

По определению разности векторов $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$. Векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BA}$ направлены в одну сторону, а их длины относятся как 3 : 5. Значит, $\overrightarrow{BM} = 0{,}6 \cdot \overrightarrow{BA} = 0{,}6 \cdot (\vec{a} - \vec{b})$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ найдём из треугольника OMB: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$ (рис. 38). Поэтому $\overrightarrow{OM} = \vec{b} + 0{,}6 \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0{,}6 \cdot \vec{a} + 0{,}4 \cdot \vec{b}$.

Ответ: $0{,}6 \cdot \vec{a} + 0{,}4 \cdot \vec{b}$.

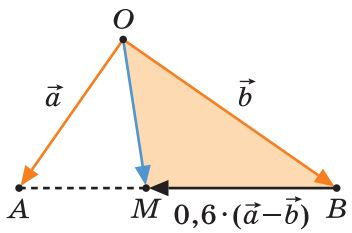


Рис. 40

ПРИМЕР 3. ★☆☆ Лебедь, Рак и Щука тянут воз в разные стороны. Щука в 2,4 раза сильнее Рака, а Лебедь сильнее Рака в 2,6 раза. Под каким углом друг к другу тянут воз Рак и Щука, если он и ныне там?

РЕШЕНИЕ

Обозначим воз точкой V, а силы, с которыми его тянут Лебедь, Рак и Щука, соответственно представим векторами $\vec{l}$, $\vec{r}$ и $\vec{s}$ (рис. 39). Поскольку сказано, что *воз и ныне там*, то сумма приложенных к нему сил равна нулю по законам физики. Сумма векторов $\vec{r}$ и $\vec{s}$ равна вектору $\overrightarrow{VC}$ диагонали параллелограмма $VRCS$, сторонами которого служат эти два вектора. Значит, условие равенства нулю суммы всех сил, приложенных к точке V, можно записать так: $\overrightarrow{VC} + \vec{l} = \vec{0}$. Откуда $\overrightarrow{VC} = -\vec{l}$. Поэтому векторы $\overrightarrow{VC}$ и $\vec{l}$ должны быть противоположны и равны по длине (рис. 40).

По условию Щука в 2,4 раза сильнее Рака, а Лебедь сильнее его в 2,6 раза. Это значит, что именно так относятся между собой длины векторов $\vec{r}$, $\vec{s}$ и $\vec{l}$. Для удобства давайте считать, что вектор $\vec{r}$ силы Рака в длину равен 10 условным единицам.

Тогда вектор $\vec{s}$ Щуки будет равен 24 единицам, а длина вектора $\vec{l}$ Лебедя — 26 таким единицам.

А теперь посмотрите на треугольник VRC. Его стороны равны длинам векторов $\vec{l}$, $\vec{r}$ и $\vec{s}$, то есть составляют 10, 24 и 26 единиц (рис. 41).

Поскольку $10^2 + 24^2 = 26^2$, то треугольник VRC прямоугольный по обратной теореме Пифагора. Поэтому угол VRC равен 90°. Значит, параллелограмм $VRCS$ является прямоугольником и векторы сил Щуки и Рака перпендикулярны друг другу.

Ответ: 90°.

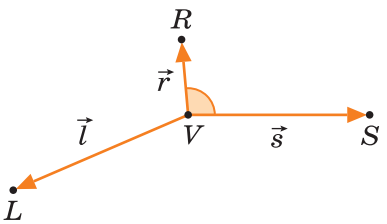


Рис. 37

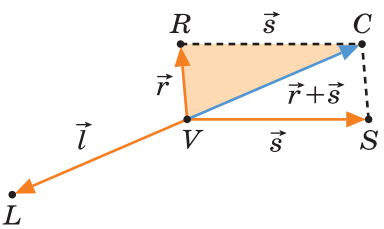


Рис. 38

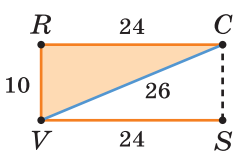


Рис. 39

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ПРИМЕР 4. ★★☆ Точки M и K лежат соответственно на диагоналях AC и BD параллелограмма $ABCD$. Известно, что $AM : CM = 2 : 3$, $BK : DK = 1 : 4$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ соответственно равны $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 42). Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

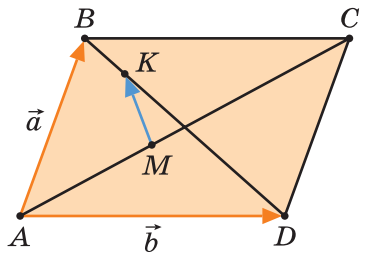


Рис. 42

РЕШЕНИЕ

Сначала выразим через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы диагоналей $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ данного нам параллелограмма: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$. Поскольку векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеют одно направление, а их длины относятся как 2 : 5, то $\overrightarrow{AM} = 0{,}4 \cdot \overrightarrow{AC} = 0{,}4 \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

Длины векторов $\overrightarrow{KB}$ и $\overrightarrow{DB}$ относятся как 1 : 5, и они тоже направлены в одну сторону. Поэтому $\overrightarrow{KB} = 0{,}2 \cdot (\vec{a} - \vec{b})$. По свойству сложения векторов для четырёхугольника $AMKB$ можно записать, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB}$ (рис. 43), то есть $\vec{a} = 0{,}4 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \overrightarrow{MK} + 0{,}2 \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

Откуда $\overrightarrow{MK} = 0{,}4 \cdot \vec{a} - 0{,}2 \cdot \vec{b}$.

Ответ: $0{,}4 \cdot \vec{a} - 0{,}2 \cdot \vec{b}$.

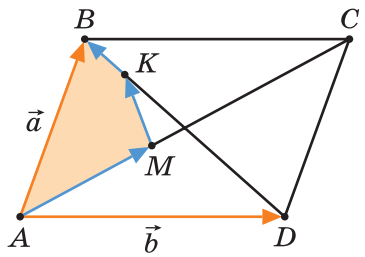


Рис. 43

ПРИМЕР 5. ★★☆ Даны два произвольных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 являются вершинами нового параллелограмма (рис. 44).

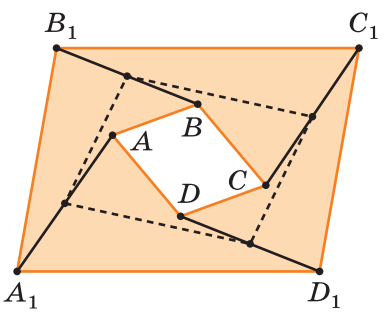


Рис. 44

РЕШЕНИЕ

Условие данной задачи формально никак не связано с векторами. Значит, решить её можно без них, не рисуя никаких стрелок. Правда, такое решение будет значительно сложнее. Мы же решим эту задачу с помощью векторов.

Поскольку $ABCD$ — параллелограмм, то равны векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ на его противоположных сторонах. Обозначим их одной буквой $\vec{a}$. Точно так же равны векторы $\overrightarrow{A_1D_1}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$, поскольку $A_1B_1C_1D_1$ тоже параллелограмм. Мы обозначим эти векторы буквой $\vec{b}$ (рис. 45).

Середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 давайте обозначим соответственно точками A_2, B_2, C_2 и D_2. Посмотрите теперь на вектор $\overrightarrow{A_2D_2}$: он соединяет середины отрезков AA_1 и DD_1 и по доказанному нами свойству должен быть равен половине суммы векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{A_1D_1}$. Таким образом, мы можем записать: $\overrightarrow{A_2D_2} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

Точно так же вектор $\overrightarrow{B_2C_2}$ соединяет середины отрезков BB_1 и CC_1. По тому же свойству он равен половине суммы векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$, то есть для него верно, что $\overrightarrow{B_2C_2} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

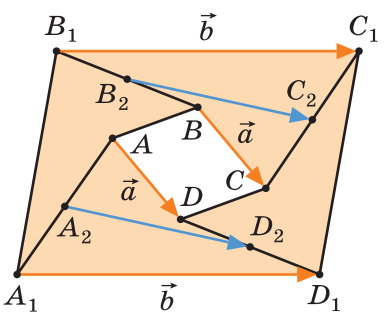


Рис. 45

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Векторы $\overrightarrow{A_2D_2}$ и $\overrightarrow{B_2C_2}$ одинаково выражаются через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Значит, они равны. Поэтому отрезки A_2D_2 и B_2C_2 равны и параллельны друг другу. Но тогда четырёхугольник $A_2B_2C_2D_2$ должен быть параллелограммом по признаку.

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 6. ★★★ Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон шестиугольника, образуют друг с другом равные углы. Докажите, что данные отрезки равны между собой (рис. 46).

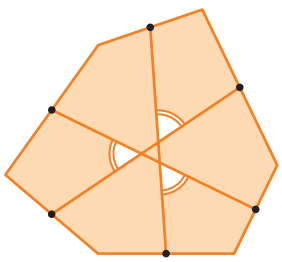


Рис. 46

РЕШЕНИЕ

Пусть векторы $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{NM}$ соединяют середины противоположных сторон шестиугольника так, как это показано на рисунке 47. Расположим на сторонах этого шестиугольника векторы $\vec{m}$, $\vec{p}$, $\vec{e}$, $\vec{n}$, $\vec{q}$ и $\vec{k}$, длины которых равны половинам этих сторон, так, чтобы они образовали замкнутую цепочку. Сумма векторов такой цепочки равна нулю. Поэтому $2 \cdot \left(\vec{k}+\vec{m}+\vec{p}+\vec{e}+\vec{n}+\vec{q}\right) = \vec{0}$.

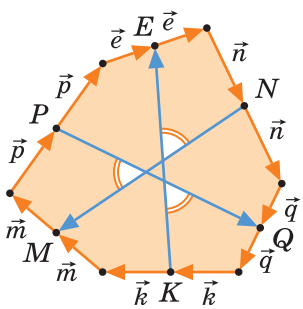


Рис. 47

Выразим векторы $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{NM}$ через векторы этой цепочки:

$$\overrightarrow{KE} = \vec{k} + 2\vec{m} + 2\vec{p} + \vec{e},$$
$$\overrightarrow{PQ} = \vec{p} + 2\vec{e} + 2\vec{n} + \vec{q},$$
$$\overrightarrow{NM} = \vec{n} + 2\vec{q} + 2\vec{k} + \vec{m}.$$

Тогда $\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM} = 3 \cdot \left(\vec{k}+\vec{m}+\vec{p}+\vec{e}+\vec{n}+\vec{q}\right) = \vec{0}$.

Значит, по правилу замкнутой цепочки из векторов $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{NM}$ можно сложить треугольник KET (рис. 48). По условию углы между этими тремя векторами равны. Поэтому равны все углы этого треугольника. Значит, треугольник KET — равносторонний. Следовательно, отрезки KE, PQ и NM равны.

Что и требовалось доказать.

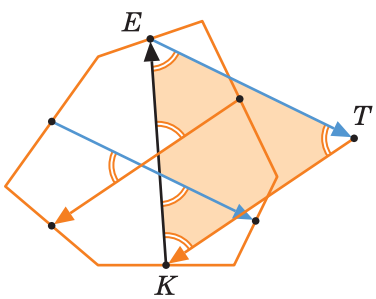


Рис. 48

ПРИМЕР 7. ★★★ Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, точка H — пересечение его высот (рис. 49). Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

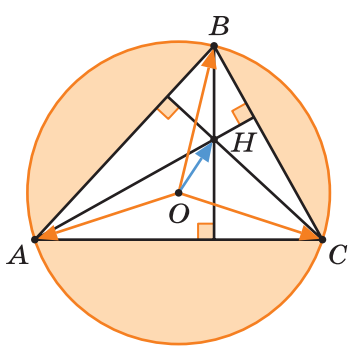


Рис. 49

РЕШЕНИЕ

Для того чтобы решить данную сложную задачу, оказывается, достаточно просто сложить векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Три эти вектора имеют равные длины, поскольку отрезки OA, OB и OC — это радиусы одной окружности.

Давайте сначала сложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$. Их суммой будет вектор $\overrightarrow{OE}$ диагонали параллелограм-

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ма $AOCE$ (рис. 50). Поскольку $OA = OC$, то данный параллелограмм является ромбом, и по свойству ромба вектор $\overrightarrow{OE}$ должен быть перпендикулярен стороне AC.

Давайте теперь сложим три вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Поскольку $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$, то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OB}$.

Векторы $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OB}$ сложим опять по правилу параллелограмма: $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OT}$ (рис. 51).

Итак, сумма трёх векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ равна некоторому вектору $\overrightarrow{OE}$. Где же может находиться точка T? Поскольку $OBTE$ — параллелограмм, то прямые BT и OE параллельны.

Значит, прямая BT тоже перпендикулярна стороне AC данного треугольника. Таким образом, точка T должна лежать где-то на высоте треугольника ABC, опущенной на его сторону AC.

Мы начали с того, что сложили векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$, а потом прибавили к ним вектор $\overrightarrow{OB}$. Но по свойству сложения векторов их можно складывать в любом порядке. Если сначала сложить векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, а потом прибавить к ним вектор $\overrightarrow{OC}$, то сумма $\overrightarrow{OT}$ всех векторов от этого не изменится. Но тогда точка T должна лежать на высоте треугольника ABC, опущенной на его сторону AB (рис. 52).

Значит, точка T лежит на пересечении высот треугольника ABC и совпадает с точкой H! То есть $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

Что и требовалось доказать.

☞ С помощью приведённого выше рассуждения можно доказать теорему о пересечении высот треугольника в одной точке векторным способом. Подумайте, как это можно сделать.

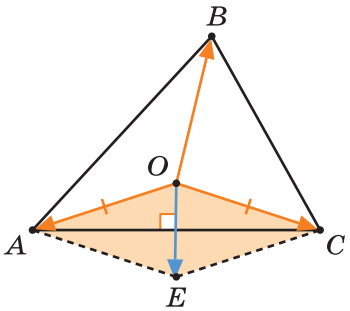


Рис. 50

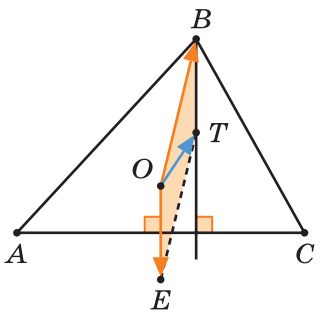


Рис. 51

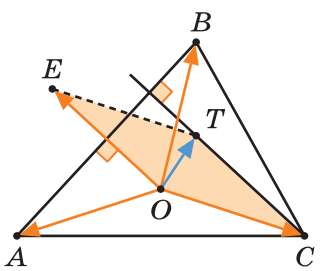


Рис. 52

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ЗАДАЧИ

1. ★☆☆ Найдите модуль суммы: а) трёх; б) четырёх векторов, показанных на клетчатой бумаге, если сторона одной клетки равна 1. (⏩ рис.)

2. ★☆☆ Самолёт пролетел сначала 5 км на северо-запад, а потом 10 км на восток. На каком расстоянии от начала своего движения он оказался?*

3. ★☆☆ Подводная лодка от базы прошла 4 км на восток, потом 6 км на юг и 12 км на запад. На каком расстоянии от базы она оказалась?

4. ★☆☆ Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если вектор их разности $\vec{a} - \vec{b}$ образует с ними углы 40° и 60°.

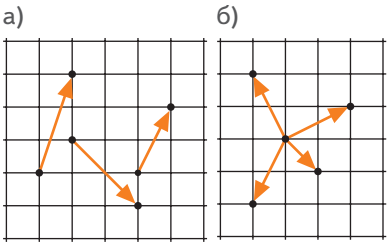
5. ★☆☆ Найдите отношение модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если вектор их суммы $\vec{a} + \vec{b}$ образует с ними углы 30° и 60°.

6. ★☆☆ Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ равны 3 и 4. Найдите площадь этого параллелограмма, если $|2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}| = 5$.

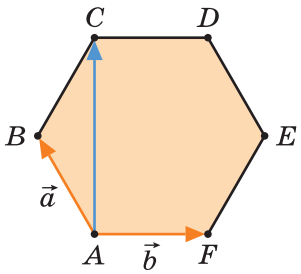
---

* В задачах 2–4, 13, 16, 17 и 22 пренебречь шарообразной формой Земли, то есть можно считать её плоской при перемещениях на небольшие расстояния.

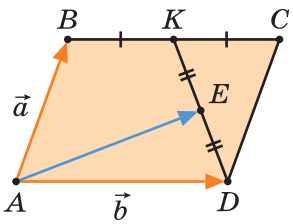
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 1



задача 10



задача 12

7. ★☆☆ Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют равные модули. Найдите их величину, если $|\vec{a} - \vec{b}| = 6$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 8$.

8. ★☆☆ Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 3$, $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}| = 4$.

9. ★☆☆ Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ соответственно равны 13 и 10. Найдите площадь этого параллелограмма, если векторы $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$ взаимно перпендикулярны.

10. ★☆☆ В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$ равны $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите вектор $\overrightarrow{AC}$. (▸▸ рис.)

11. ★☆☆ Точка M лежит на продолжении отрезка AB, причём $AM : MB = 3 : 7$. Точка O — произвольная. Найдите вектор $\overrightarrow{OM}$, если $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

12. ★☆☆ В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC, точка E — середина отрезка KD. Найдите вектор $\overrightarrow{AE}$, если $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. (▸▸ рис.)

13. ★☆☆ Группа туристов прошла сначала 30 км на юго-восток, а потом 16 км на юго-запад. На каком расстоянии от начала маршрута они оказались? (▸▸ рис.)

14. ★☆☆ Человек хочет переплыть реку так, чтобы оказаться на другом её берегу строго напротив того места, где он зашёл в воду. Под каким углом к берегу ему необходимо плыть, если его скорость относительно воды в два раза больше скорости течения реки?

15. ★☆☆ Пловец переплыл реку шириной 150 м, держа направление на противоположный берег. Средняя его скорость относительно воды составляла 3 км/ч. Какова скорость течения реки, если пловец переплыл её за 2 мин 24 сек? (▸▸ рис.)

16. ★☆☆ В безветренную погоду вертолёт движется со скоростью 135 км/ч. Какова будет его скорость относительно земли, если ветер: а) попутный; б) встречный; в) боковой? Во всех случаях ветер дует со скоростью 20 м/с. (▸▸ рис.)



задача 13

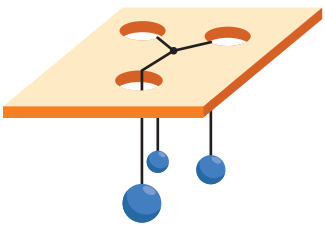


задача 15

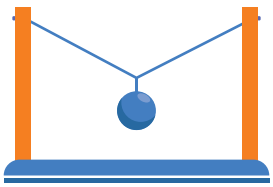


задача 16

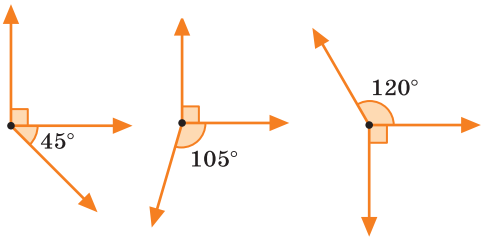
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 18



задача 19



задача 20

17. ★☆☆ Скорость падения града средней величины около 100 км/ч. С какой скоростью он будет лететь на ветровое стекло автомобиля, который едет со скоростью 75 км/ч?

18. ★☆☆ В горизонтальном столе просверлили три отверстия в вершинах остроугольного треугольника, через них пропустили три верёвки и привязали к ним одинаковые грузы. После чего верёвки связали одним узлом и отпустили. В какой точке треугольника остановится узел? (По законам физики точка неподвижна, если сумма всех приложенных к ней сил равна нулю.) (задача 18 рис.)

19. ★☆☆ На середину натянутой горизонтально верёвки подвесили груз. При этом сила натяжения верёвки оказалась на 30 % больше веса самого груза. Какой угол образует верёвка в точке крепления груза? (задача 19 рис.)

20. ★☆☆ Из одной точки выходят три вектора длиной 10 см так, как это показано на рисунках. С точностью до 1 мм найдите длину суммы этих векторов. (задача 20 рис.)

21. ★☆☆ Для четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка M, что верно равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$. Является ли данный четырёхугольник параллелограммом?

22. ★★☆ Лодка держит курс по компасу на восток и относительно воды имеет скорость 4 узла. Ветер сносит её на север с такой же по величине скоростью. Кроме того, течение перемещает лодку на юго-запад со скоростью 1 узел. Найдите величину скорости, с которой эта лодка движется относительно берега.

23. ★★☆ В окружности с центром O проведены перпендикулярные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M. Докажите, что вектор $\overrightarrow{OM}$ равен половине векторной суммы $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

24. ★★☆ Для четырёхугольника $ABCD$ выполняется условие: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}$. Докажите, что этот четырёхугольник — трапеция.

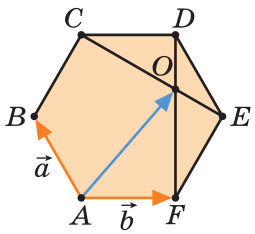
25. ★★☆ В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ взяли произвольную точку O. Докажите, что суммы векторов $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}$ равны.

26. ★★☆ Диагонали CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке O. Найдите вектор $\overrightarrow{AO}$, если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$ равны $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (задача 26 рис.)

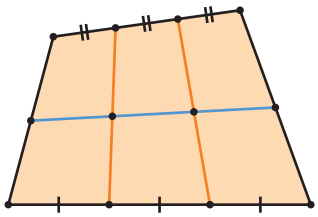
27. ★★☆ По двум прямым с постоянными скоростями движутся две точки. Докажите, что середина соединяющего их отрезка также движется по прямой линии.

28. ★★☆ Каждую из двух противоположных сторон четырёхугольника разделили на три равные части. Соответствующие точки деления соединили отрезками. Докажите, что полученные отрезки делят среднюю линию четырёхугольника на три равные части. (задача 28 рис.)

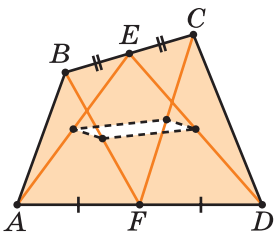
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 26



задача 28



задача 29

29. ★★☆ В четырёхугольнике $ABCD$ точки E и F — середины непараллельных сторон BC и AD. Докажите, что середины отрезков AE, ED, BF и AE являются вершинами параллелограмма. (рис.)

30. ★★☆ На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки M и K так, что $AM = KC$. Точки P и Q — середины отрезков MK и AC соответственно. Докажите, что прямая PQ параллельна биссектрисе треугольника ABC. (рис.)

31. ★★☆ Точки M, N, K и L — середины сторон AC, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$ соответственно. Докажите, что расстояние между серединами отрезков MK и NL равно четверти стороны AE пятиугольника.

32. ★★☆ Пусть M и M_1 — соответственно точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что вектор $\overrightarrow{MM_1}$ равен среднему арифметическому векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$.

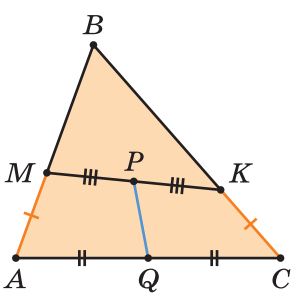
33. ★★☆ В произвольном шестиугольнике отметили середины сторон. Полученные точки соединили через одну так, как показано на рисунке. Образовалось два треугольника. Докажите, что точки пересечения их медиан совпадают. (рис.)

34. ★★☆ В треугольнике ABC постройте точку O, чтобы $\overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{OB} + 3\cdot\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

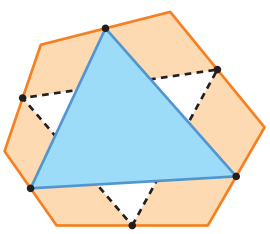
35. ★★☆ (*Прямая Эйлера*) Докажите с помощью векторов, что точка пересечения медиан треугольника лежит на отрезке, соединяющем центр его описанной окружности и ортоцентр. В каком отношении она делит указанный отрезок?

36. ★★★ Произвольный четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Докажите, что векторная сумма $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OH}$, где точка H лежит на всех перпендикулярах, которые опущены из середин сторон четырёхугольника на его противоположные стороны. (рис.)

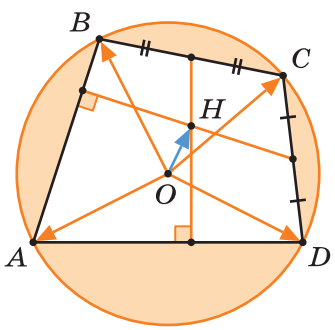
37. ★★★ Докажите, что не существует правильного n-угольника, все вершины которого находятся в узлах клетчатой бумаги, если: а) $n = 6$; б) $n > 6$.



задача 30



задача 33



задача 36

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Центр масс

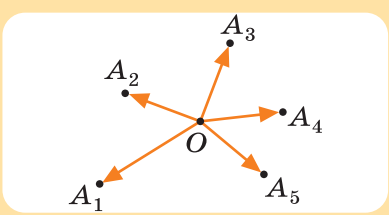
С методами группировки векторов связано такое важное понятие физики, как *центр масс системы материальных точек*. Центром масс называют такую точку, в которой условно сосредоточена вся масса системы. Эта точка характеризует движение нескольких масс как одного целого. То есть под воздействием внешних сил вся система данных масс будет двигаться так, как эта точка*.

В общем случае центром масс m_1, m_2, ..., m_n, расположенных в точках A_1, A_2, ..., A_n, называют такую точку O, для которой сумма векторов $m_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n \cdot \overrightarrow{OA_n}$ равна нулю. Для любой системы масс такая точка O всегда существует и единственна.

Мы рассмотрим понятие центра масс в частном случае, когда все массы системы одинаковы, и научимся находить центр масс для данных точек A_1, A_2, ..., A_n. Причём сделать это нам поможет метод группировки векторов. Давайте запишем определение для центра равных масс.

Центром равных масс, расположенных в точках A_1, A_2, ..., A_n, называется такая точка O, что

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$



Почему же существует центр масс для любых точек A_1, A_2, ..., A_n? Именно на этот вопрос отвечает теорема о центре масс.

* Точнее, любое движение системы нескольких масс можно разложить на движение центра этих масс и вращения всей системы вокруг него.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ТЕОРЕМА О ЦЕНТРЕ МАСС

Для любой системы точек существует единственный центр масс.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть равные массы расположены в точках A_1, A_2, ..., A_n. Возьмём на плоскости произвольную точку M и проведём из неё во все точки данной системы векторы $\overrightarrow{MA_1}$, $\overrightarrow{MA_2}$, ..., $\overrightarrow{MA_n}$. Их набор полностью определяет положение системы точек A_1, A_2, ..., A_n относительно точки M. Как же можно определить относительно точки M положение центра этой системы? Логично направить туда из точки M вектор, равный среднему арифметическому всех векторов $\overrightarrow{MA_1}$, $\overrightarrow{MA_2}$, ..., $\overrightarrow{MA_n}$. Поэтому рассмотрим вектор:

$$\overrightarrow{MO} = \frac{MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_n}{n}. \quad (1)$$

Удивительно то, что построенный таким образом вектор $\overrightarrow{MO}$ из произвольной точки M всегда будет приходить в одну и ту же точку O. Наверное, вы уже догадались: точка O и будет центром масс данной системы (рис. 53). Давайте это докажем. По правилу треугольника для сложения векторов мы можем записать, что:

$$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1},\ \overrightarrow{MA_2} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_2},\ \ldots,$$
$$\overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_n}.$$

Если теперь сложить все эти равенства, то мы получим:

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = n \cdot \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}. \quad (2)$$

Из равенства (1) следует, что: $n \cdot \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n}$.

Поэтому $n \cdot \overrightarrow{MO} = n \cdot \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$.

Откуда $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

Значит, точка O является центром масс, расположенных в точках A_1, A_2, ..., A_n.

Почему же такая точка O может быть только одна? На этот вопрос отвечает уравнение (2). Если бы существовали два различных центра масс, мы бы обозначили их теми же буквами O и M. Но тогда по определению центра масс выполнялись бы равенства:

$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$, $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$.

Если мы подставим эти равенства в уравнение (2), то сразу же получим, что $n \cdot \overrightarrow{MO} = \vec{0}$. Это значит, вектор $\overrightarrow{MO}$ равен нулю. Но такого не может быть для различных точек O и M. То есть мы получили противоречие. Значит, центр масс у системы может быть только один.

Что и требовалось доказать.

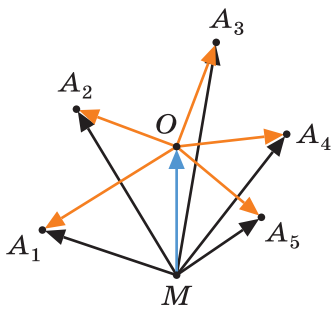


Рис. 53

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Центр масс многоугольника

Как проще всего определить положение центра масс для n данных точек? Давайте найдём его для $n = 3, 4, 5$ и 6, просто группируя идущие в них векторы. Для удобства давайте называть нужную точку центром масс многоугольника, в вершинах которого расположены равные массы. Начнём с треугольника.

ЦЕНТР МАСС ТРЕУГОЛЬНИКА

Возьмём произвольный треугольник ABC и найдём его центр масс, то есть такую точку $\vec{O}$, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Отметим точку M — середину отрезка AB (рис. 54) и выразим сумму векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ через вектор $\overrightarrow{OM}$ медианы треугольника AOB: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}$.

Тогда условие $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ центра масс можно будет записать так: $2 \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Откуда $\overrightarrow{OC} = -2 \cdot \overrightarrow{OM}$.

Значит, векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OM}$ имеют противоположные направления, а их длины относятся как $2 : 1$. Из этого следует, что эти векторы должны лежать на одной прямой. Поэтому точка O лежит на медиане CM треугольника ABC и делит её в отношении $2 : 1$.

Такое же рассуждение можно провести для середины K стороны AC треугольника и получить, что искомая точка O должна лежать на его медиане BK и делить её в том же отношении $2 : 1$ (рис. 55). Значит, точка O должна находиться на пересечении медиан треугольника. Итак,

центр масс треугольника находится на пересечении его медиан (рис. 56).

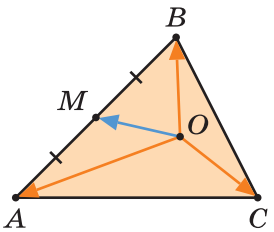


Рис. 54

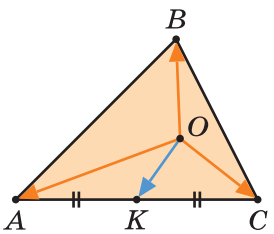


Рис. 55

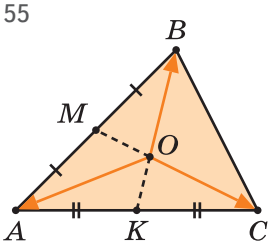


Рис. 56

☞ Данное рассуждение можно считать векторным доказательством того, что медианы любого треугольника пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $2 : 1$.

ЦЕНТР МАСС ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

Группируя пары векторов, можно найти центр масс любого четырёхугольника. Давайте запишем, где он находится:

центр масс четырёхугольника находится на пересечении его средних линий.

☞ Как это доказать? Нужно все векторы, выходящие из центра масс, разбить на две пары и выразить сумму векторов в каждой паре через вектор своей медианы. Сделайте это в качестве упражнения.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

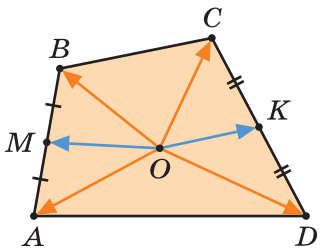


Рис. 58

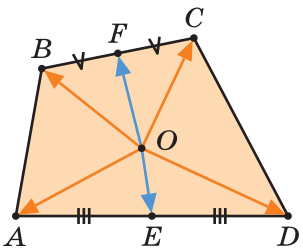


Рис. 57

УПРАЖНЕНИЯ

28. Пользуясь рисунками 57 и 58, докажите, что центр масс четырёхугольника лежит на каждой его средней линии.

29. Используя метод группировки векторов, можно найти центры для любого многоугольника. Сделайте это самостоятельно для пятиугольника и шестиугольника.

Как с помощью центра масс доказать теорему Вариньона?

ЗАДАЧИ

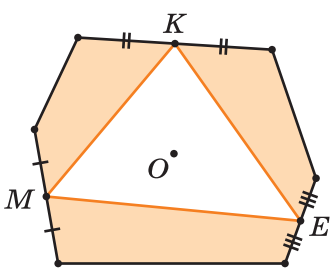
38. С помощью метода группировки векторов докажите, что центр масс четырёхугольника находится на отрезке, соединяющем середины его диагоналей.

39. Докажите, что центр масс любого шестиугольника находится на пересечении медиан треугольника MKE, образованного серединами трёх его несмежных сторон. (⏩ рис.)

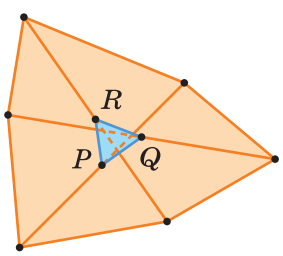
40. Докажите, что центр масс шестиугольника находится в точке пересечения медиан треугольника PRQ, образованного серединами трёх его диагоналей, соединяющих противоположные вершины этого шестиугольника. (⏩ рис.)

41. Докажите, что центр масс пятиугольника $ABCDE$ лежит на отрезке, соединяющем вершину A и центр масс четырёхугольника $BCDE$. В каком отношении он делит этот отрезок?

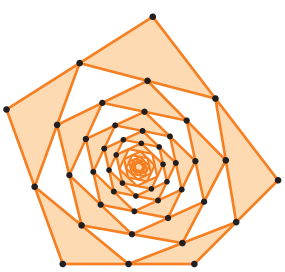
42. ★★★ В пятиугольнике последовательно соединили середины всех его сторон. Получился новый пятиугольник. В нём проделали ту же операцию, и так далее до бесконечности. В какую точку плоскости будут «стягиваться» получающиеся пятиугольники? (⏩ рис.)



⏩ задача 39



⏩ задача 40



⏩ задача 42

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

§8 Базис векторов. Скалярное произведение

Система координат

Конечно, вы уже знаете, что такое система координат на плоскости: это две перпендикулярные прямые, на каждой из которых отмечены числа — положительные и отрицательные. Точку пересечения этих прямых называют началом координат и обозначают числом 0 (рис. 1). Систему координат вы уже проходили на уроках алгебры и слышали, что её придумал математик Рене Декарт, поэтому такую систему и называют его именем.

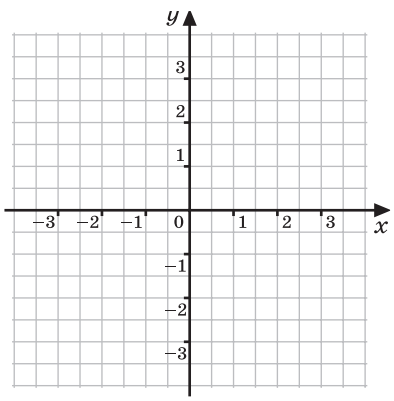
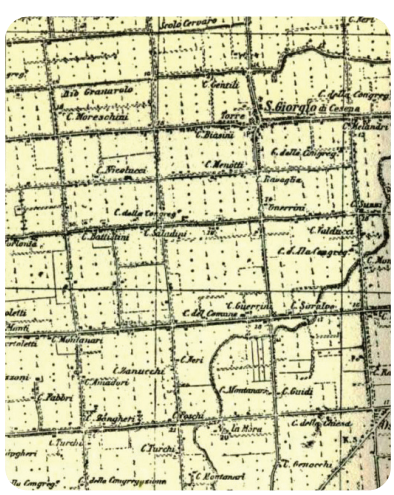


Рис. 1

На самом деле такая прямоугольная система координат — вещь очень естественная, и придумана она была задолго до Рене Декарта. Например, в Древнем Риме ещё до новой эры именно так размечали землю. Для этого на равнине находили возвышение, устанавливали на нём столб, а потом проводили через него две перпендикулярные линии: одну — с востока на запад, другую — с юга на север. По сути, две эти прямые и были координатными осями. На них от центрального столба откладывали равные отрезки длиной по 100 *актусов**, а потом через концы всех отмеченных отрезков параллельно данным осям прокладывали дороги. Таким образом, вся земля вокруг столба разбивалась на одинаковые квадраты — римляне называли их *центуриями*. На перекрёстках дорог они устанавливали особые камни и писали на каждом из них два числа, обозначающие номера дорог. Можно сказать, что эти числа и были координатами данного места. Прямоугольная сеть римских дорог существовала потом тысячи лет — её можно видеть, например, на фрагменте карты Северной Италии XIX века (рис. 2).


Рис. 2
Прямоугольная сеть римских дорог возле города Чезена

Впрочем, главную идею системы координат — записывать положение точки на плоскости двумя числами — человечество открывало ещё много раз. Мы привыкли, что

* Считается, что один римский актус – это длина борозды, которую мог без отдыха вспахать вол. Она же равна 120 ступням взрослого человека, что составляет около 36 метров.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

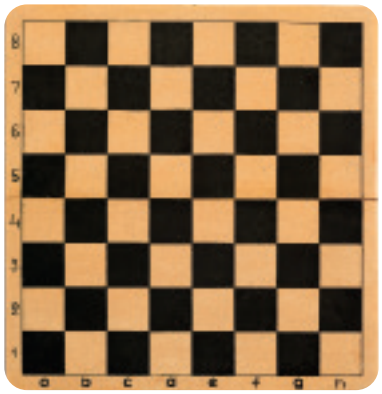


Рис. 3

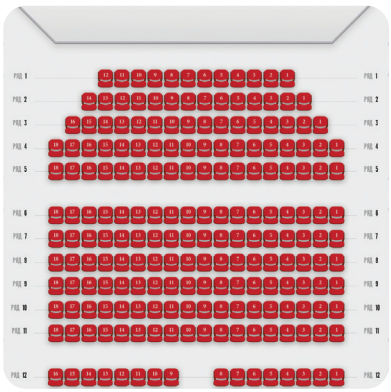


Рис. 4



Рис. 5

каждая клетка на шахматной доске обозначена сейчас буквой и цифрой, поэтому первый ход пешкой можно записать так: e2–e4. Однако люди додумались до этого далеко не сразу. Первая попытка записывать ходы шахматных фигур была ещё в XII веке, когда короли Англии и Франции играли в шахматы по переписке. Однако современными обозначениями они не пользовались. Только в 1512 году в Италии вышла первая книга об игре в шахматы, в которой клетки доски были раскрашены в два цвета и пронумерованы числами от 1 до 64 (рис. 3). А современная система записи шахматных партий, или *нотация*, появилась лишь в конце XVIII века. Именно ей пользуются сегодня игроки всего мира.

Примерно та же история происходила с театром. Вернее, с нумерацией мест в зрительном зале. Поначалу этой нумерации вовсе не было, что приводило к постоянной путанице и спорам. Привычная же нам двойная нумерация мест в зале по рядам и номерам кресел в каждом ряду появилась в России только в XVIII веке в конце правления Екатерины II (рис. 4).

Сегодня систему координат вы встречаете на уроках алгебры, когда рисуете графики функций. Но даже если с другом вы играете в «Морской бой», то всё равно пользуетесь системой координат — двойной нумерацией клеток на игровом поле (рис. 5). Такую же систему использует и любой художник, когда создаёт мозаику из разноцветных плиток — ведь каждая плитка мозаики должна стоять на своём месте, иначе не получится нужной картины (рис. 6). Изображение на экране вашего компьютера получается по тому же принципу — оно состоит из огромного числа пикселей — светящихся точек: каждая точка на экране должна гореть своим цветом (рис. 7), а её положение на нём задают два числа — координаты.

Почему же систему координат называют системой Декарта? Математика со времён Античности стремилась иметь дело только с геометрическими понятиями и величинами: фигурами, длинами отрезков, площадями и объёмами тел.



Рис. 6
Пётр I на мозаике, выполненной М. В. Ломоносовым

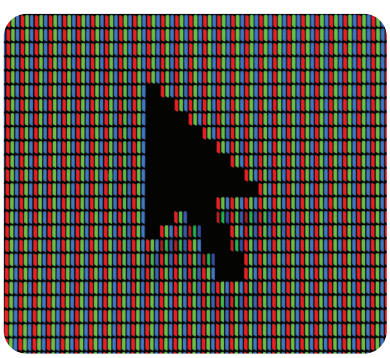


Рис. 7
Пиксели на экране компьютера

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

В каком-то смысле все эти понятия легче было себе представить в их материальном облике. В 1637 году Рене Декарт опубликовал свою «Геометрию», которая стала настольной книгой для многих учёных XVII века. В этой книге Декарт впервые ввёл систему координат в классическую геометрию. Но самое главное — он показал, что каждую точку на плоскости можно задавать двумя числами и таким образом всю геометрию можно свести к работе с действительным числами, то есть к алгебре. При этом он неизбежно сделал ещё один шаг: понял, что положительное действительное число и длина отрезка — это одно и то же.



Рене Декарт (1564—1650)

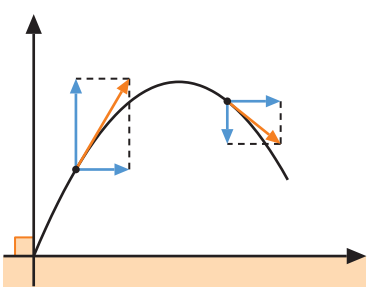
Геометрию Декарта теперь называют *аналитической*. Кривые линии и графики в ней задаются уравнениями, а нахождение точек пересечения линий сводится к решению систем уравнений. С помощью открытого им метода Декарт легко решил несколько геометрических задач и, наоборот, показал, как сложные алгебраические уравнения можно свести к пересечению простых линий. Сделав такое революционное открытие, Декарт не удержался и сформулировал несколько общих принципов. Один из них гласил, что чертежи в геометрии не нужны, поскольку они связаны с нашим воображением, а воображение необходимо исключить из настоящей науки. Этот принцип хорошо показывает, насколько он был категоричным человеком.

Стоит добавить, что именно Рене Декарту мы обязаны удобной системой символов, которыми сейчас пользуемся в алгебре. Например, он ввёл привычное для нас обозначение степеней чисел x^2 или y^3, предложил коэффициенты уравнений записывать первыми буквами латинского алфавита a, b и c, а переменные величины — последними его буквами x, y, z. Свой труд Декарт завершил словами: «Я надеюсь, что потомки будут благодарны мне не только за то, что я здесь разъяснил, но и за то, что мною было добровольно опущено, с целью предоставить им удовольствие самим найти это».

Векторы и координаты

Во времена Декарта понятия вектора ещё не было, поэтому он не мог знать, что векторы имеют прямое отношение к открытой им системе. На уроках физики вы теперь не только складываете векторы сил или скоростей, но и, наоборот, раскладываете их по двум различным направлениям. Без этого очень неудобно решать, например, задачу о полёте брошенного камня или о мяче, который катится по наклонной плоскости. Как правило, силы и скорости в таких задачах раскладывают по двум перпендикулярным направлениям. По этим же направлениям располагают и оси системы координат (рис. 8, *а, б*).

а)



б)

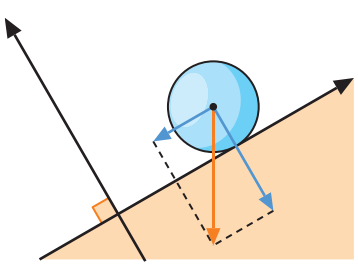


Рис. 8

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

На самом деле любая система координат связана с векторами. Давайте проведём следующий мысленный эксперимент. Предположим, на чистом листе бумаги вы нарисовали стрелку. Можно ли только одними словами сообщить другому человеку, какая это стрелка? Вряд ли у вас получится это сделать так, чтобы на своём листе он изобразил точно такую же стрелку.

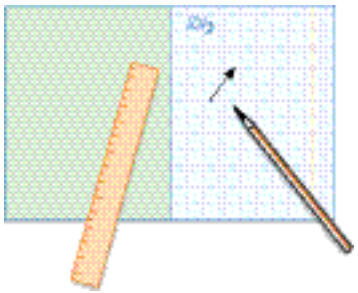


Рис. 9

Другое дело, если ваша стрелка нарисована на листе тетради в клеточку. Пусть это будет вектор $\vec{c}$, изображённый на рисунке 9. Как описать его словами другому человеку? Скорее всего, вы произнесёте примерно такую фразу: «Рисуйте стрелку — отступите от её начала на три клетки вправо и поднимитесь на четыре клетки вверх». По этой инструкции другой человек легко нарисует вектор $\vec{c}$, равный вашему. Правда, если у него будет такая же тетрадка в клеточку.

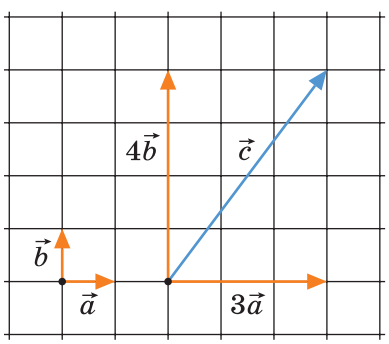


Рис. 10

Какая же информация содержится в произнесённых вами словах? Выражение «одна клетка вправо» задаёт вектор перемещения $\vec{a}$ по горизонтальной линии вашей тетради на один шаг, а оборот «одна клетка вверх» — вектор перемещения $\vec{b}$ на один шаг, но в перпендикулярном направлении. Поэтому переданное вами сообщение означает, что от начальной точки нужно сделать три шага направо и четыре шага вверх, то есть сложить три вектора $\vec{a}$ и четыре вектора $\vec{b}$. Поэтому логично считать, что вектор $\vec{c}$ будет равен сумме $3\vec{a} + 4\vec{b}$ (рис. 10). Пара чисел (3; 4) однозначно определяет вектор $\vec{c}$ относительно векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вот почему такие числа называют координатами этого вектора в системе векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Сами же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **координатными**. Обычно через них проводят оси системы координат и откладывают их от одной точки, которую называют **началом координат**.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Нарисуйте на клетчатой бумаге систему координат, образованную векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которые расположены на линиях сетки и длина которых равна 1 клетке. Отложите от начала этой системы координат векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$, координаты которых соответственно равны (5; 12), (–8; 6). Чему равны модули этих векторов?

2. Чему равны координаты самих векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в заданной ими же системе?

3. В системе координат, показанной на рисунке 11: а) найдите координаты векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$; б) отложите от точки A вектор $\overrightarrow{AB}$ с координатами (2; –3) и найдите координаты вектора $\overrightarrow{OB}$.

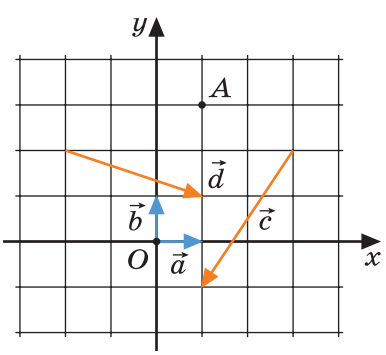


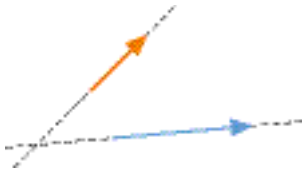
Рис. 11

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

После знакомства с координатами векторов на клетчатой бумаге давайте перейдём к общему случаю. Оказывается, любой вектор на плоскости можно однозначно разложить по двум направлениям, и эти направления не обязательно должны быть перпендикулярны друг другу. Какие же это могут быть направления? На самом деле — почти любые. Главное, чтобы они не совпадали и не были противоположными. Если же направления задавать не лучами, а векторами, то эти векторы должны лежать на пересекающихся прямых. Именно такие векторы называют **неколлинеарными** (рис. 12, *а*). Ведь слово *коллинеарный* пришло из латыни и означает «расположенный на одной линии». Значит, **коллинеарными** векторы будут только тогда, когда равные им векторы можно поместить на одну прямую (рис. 12, *б*).

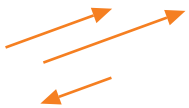
Коллинеарные векторы обладают одним важным свойством: любой из них может быть получен из другого умножением на некоторое действительное число. Обычно это формулируют как лемму о коллинеарных векторах.

а)



Неколлинеарные векторы

б)



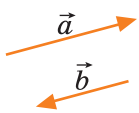
Коллинеарные векторы

Рис. 12

ЛЕММА О КОЛЛИНЕАРНЫХ ВЕКТОРАХ

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то существует такое действительное число x, что $\vec{a} = x \cdot \vec{b}$.

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} = x \cdot \vec{b}$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Тогда есть всего две возможности: эти векторы либо имеют одно направление, либо противоположные. Давайте обозначим буквой k положительное число, равное отношению их модулей: $k = \frac{|a|}{|b|}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одно направление, нужное число x будет равно $+k$, а если их направления противоположны, то $-k$. Действительно, в каждом случае длины векторов $x \cdot \vec{b}$ и $\vec{a}$ будут равны, так как $|x \cdot \vec{b}| = k \cdot |\vec{b}| = \frac{|a|}{|b|} \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}|$. Направления векторов $x \cdot \vec{b}$ и $\vec{a}$ будут совпадать, поскольку в первом случае $x > 0$, а во втором $x < 0$. Значит, по определению $x \cdot \vec{b} = \vec{a}$.

Что и требовалось доказать.

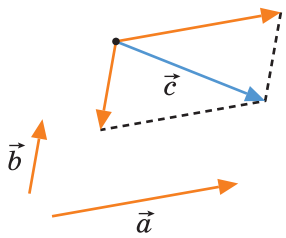
Любые два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости образуют свою систему, или базис, по направлениям которого можно разложить другой произвольный вектор $\vec{c}$. А о том, почему это можно сделать единственным образом, говорит следующая теорема.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ТЕОРЕМА

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то любой вектор $\vec{c}$ на плоскости можно разложить по базису этих векторов единственным образом, то есть существует только одна пара действительных чисел x и y, такая, что $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$.

Числа x и y называют **координатами вектора** $\vec{c}$ в базисе векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и записывают это так: $\vec{c}\{x;\ y\}$.



Разложение по базису векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Существование разложения. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат на двух пересекающихся прямых, то есть они неколлинеарны. Возьмём произвольный вектор $\vec{c}$, который не параллелен ни одному из них. Обозначим его начало и конец точками O и C. А теперь проведём через эти точки прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 13). Эти прямые не будут параллельными и обязательно пересекутся в некоторой точке A, поэтому образуется треугольник AOC. По правилу сложения векторов для него можно записать, что $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$.

По нашему построению векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{OA}$ коллинеарны, поэтому существует такое действительное число x, что $\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{a}$.

Точно так же будут коллинеарны векторы $\vec{b}$ и $\overrightarrow{OB}$, следовательно, существует такое действительное число y, что $\overrightarrow{OB} = y \cdot \vec{b}$.

Поэтому $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$.

Данное равенство и означает, что вектор $\vec{c}$ можно разложить по направлениям двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Числа x и y определяют его в базисе двух этих векторов и являются его координатами в нём.

Мы с вами пока не рассмотрели случай, когда вектор $\vec{c}$ параллелен одному из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда не образуется треугольник AOC, но утверждения теоремы это не меняет. Действительно, если вектор $\vec{c}$ окажется параллелен одному из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$, то он будет равняться либо $x \cdot \vec{a}$, либо $y \cdot \vec{b}$. А это значит, что одна из его координат в базисе векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет просто равна нулю.

Единственность разложения. Итак, мы с вами доказали, что произвольный вектор $\vec{c}$ можно разложить по базису векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Но почему такое разложение единственно? Или почему в данном базисе вектор $\vec{c}$ может иметь

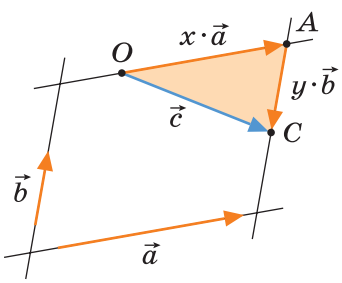


Рис. 13

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

только одну пару координат $\{x;\ y\}$? Доказать это можно рассуждением от противного. Давайте так и сделаем. Предположим, что вектор $\vec{c}$ в базисе векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ удалось разложить с другими координатами $\{x_1;\ y_1\}$. Тогда можно будет записать его через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ двумя различными способами: $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$; $\vec{c} = x_1 \cdot \vec{a} + y_1 \cdot \vec{b}$.

Если мы приравняем эти выражения, то получим $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = x_1 \cdot \vec{a} + y_1 \cdot \vec{b}$.

Откуда следует, что $(x - x_1) \cdot \vec{a} + (y - y_1) \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

Предположим, что $(x - x_1) \neq 0$, и выразим из этого равенства вектор $\vec{a}$ через вектор $\vec{b}$: $\vec{a} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} \cdot \vec{b} = k \cdot \vec{b}$, где буквой k просто обозначено число $\dfrac{y - y_1}{x - x_1}$.

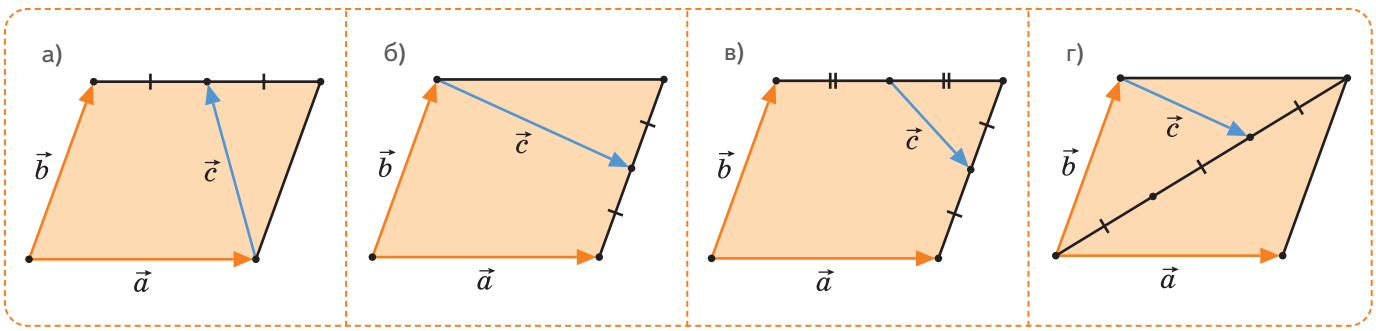
Что это может значить? Это означает, что вектор $\vec{a}$ получается из вектора $\vec{b}$ умножением на некоторое число k. Но тогда эти векторы лежат на одной прямой либо параллельны друг другу. А по условию векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то есть лежат на пересекающихся прямых. Мы получили противоречие. Значит, на самом деле $(x - x_1) = 0$. Совершенно так же можно доказать, что $(y - y_1) = 0$. Поэтому должно быть $x_1 = x$ и $y_1 = y$. То есть никаких других координат $\{x_1;\ y_1\}$ у вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не может быть.

Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

4. Разложите векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ по базису векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на каждом из рисунков и напишите их координаты в этом базисе (рис. 14).

Рис. 14



5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на рисунках расположены на сторонах параллелограмма (рис. 15). Напишите координаты вектора $\vec{c}$ в базисе векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

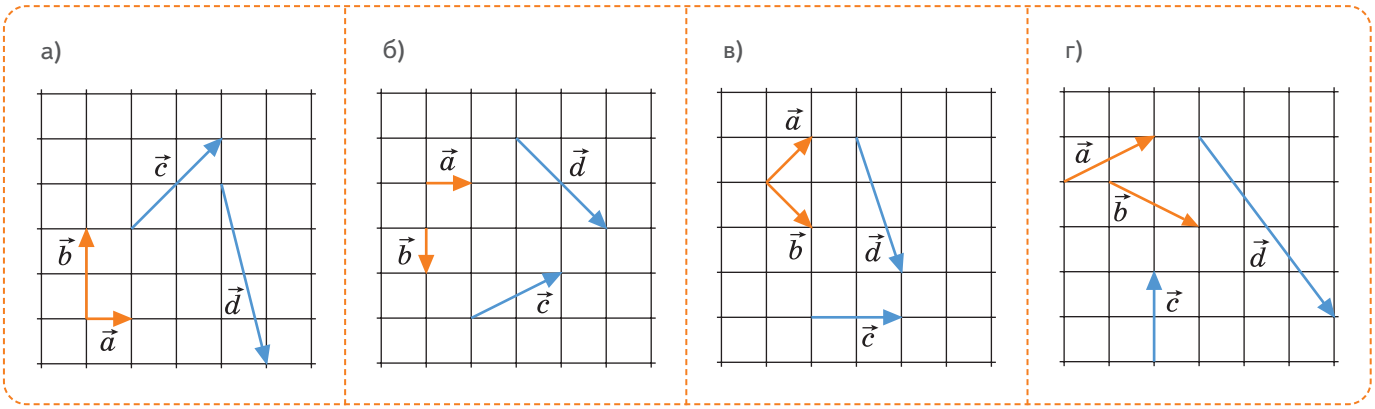


Рис. 15

Система координат Декарта

Мы с вами уже убедились, что любые два неколлинеарных вектора задают свою систему, или базис, по которому можно однозначно разложить любой другой вектор и получить его координаты в этом базисе. По традиции векторы, образующие систему координат, рисуют выходящими из одной точки O — начала координат и обозначают их буквами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (рис. 16). Такие векторы называют **базисными** или **координатными** векторами.

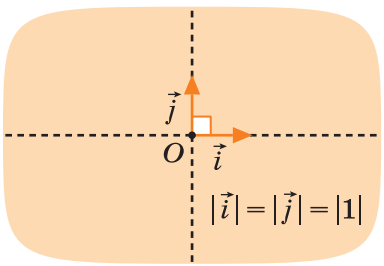


Рис. 16

Самой распространённой является система координат, в которой базисные векторы перпендикулярны друг другу, а длина каждого из них равна 1. Такую систему называют нормированной прямоугольной или декартовой. Обычно её рисуют, не указывая базисные векторы, а просто ставят направления этих векторов на координатных лучах и отмечают на них единицы длины. Сами же координатные оси соответственно обозначают буквами x и y (рис. 17).

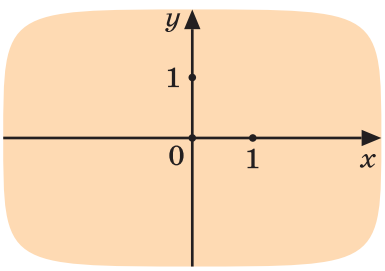


Рис. 17

Стоит добавить, что сам Рене Декарт придумал не совсем такую систему координат. Его система представляла собой лишь один координатный угол или два луча с общим началом, на которые он проектировал точки, лежащие внутри этого угла. Произошло это потому, что в XVII веке отрицательные числа ещё не считали настоящими числами. Современная же прямоугольная система координат появилась только через 50 лет после смерти Декарта в трудах немецкого учёного и философа Готфрида Лейбница.

Интересно, что во Франции существует даже легенда о том, как Рене Декарт придумал свою систему. Ещё молодым человеком, будучи на военной службе, он увидел муху, ползущую по стеклу окна. Окно состояло из квадратных ячеек, и Декарт стал думать, как можно точно определить на нём положение этой мухи (рис. 18). Так, по легенде, и родилась прямоугольная система координат, которая связала геометрию и алгебру в одно целое. Великие открытия часто обрастают такими легендами. Например, в Англии полагают, что сэр Исаак Ньютон открыл закон всемирного тяготения в тот самый момент, когда в саду на его голову упало яблоко.

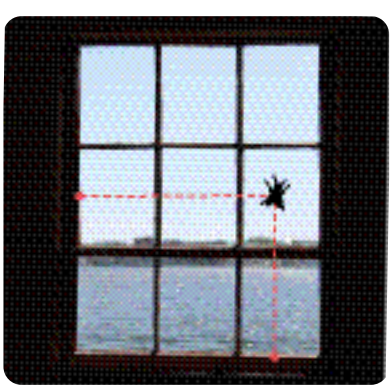


Рис. 18
Система координат Декарта

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

УПРАЖНЕНИЯ

6. Запишите разложение векторов $\vec{a}\{5;\ 7\}$, $\vec{b}\{-3;\ 2\}$, $\vec{c}\{0;\ -4\}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

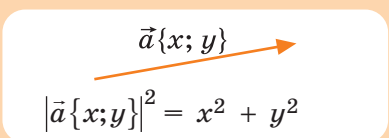
7. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны 5 и 7. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.

Длина вектора в системе Декарта

Длину или модуль вектора в системе Декарта можно выразить через его координаты по теореме Пифагора. И это показывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА

Квадрат длины вектора в системе Декарта равен сумме квадратов его координат.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты x и y. По определению это значит, что $\overrightarrow{AB} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$. Если вектор $\overrightarrow{AB}$ не параллелен осям координат, то можно построить треугольник ABC, две стороны которого будут параллельны этим осям (рис. 19). Тогда $\overrightarrow{BC} = x\cdot\vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = y\cdot\vec{j}$.

В системе Декарта координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ перпендикулярны друг другу, а их модули равны 1. Поэтому треугольник ABC будет прямоугольным, а его катеты BC и AC будут иметь длины $|x|$ и $|y|$ (рис. 20).

Запишем для треугольника ABC теорему Пифагора: $AB^2 = BC^2 + AC^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$.

Это равенство означает, что квадрат длины вектора $\overrightarrow{AB}$ равен сумме квадратов его координат. Если же вектор $\overrightarrow{AB}$ окажется параллелен одной из осей, то одна из его координат станет равна нулю. Тогда квадрат отрезка AB будет равен квадрату другой его координаты и утверждение теоремы всё равно останется верным.

Что и требовалось доказать.

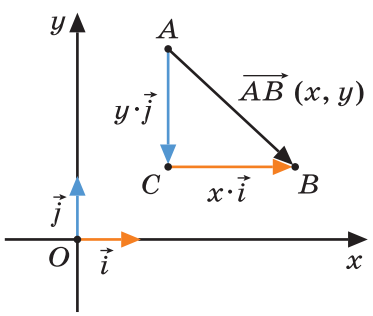


Рис. 19

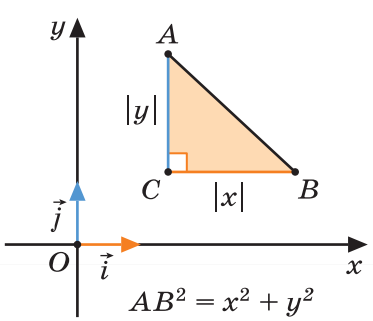


Рис. 20

УПРАЖНЕНИЯ

8. Найдите длины векторов $\vec{a}\{-1;\ 3\}$, $\vec{b}\{5;\ 5\}$, $\vec{c}\{-1;\ 7\}$, $\vec{d}\{\sqrt{2};\ 1\}$, $\vec{e}\{1;\ \sqrt{3}\}$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

9. Среди векторов $\vec{a}\{0;\ 2\}$, $\vec{b}\{-4;\ 7\}$, $\vec{c}\{8;\ -8\}$, $\vec{d}\{-\sqrt{3};\ 1\}$, $\vec{e}\{8;\ -6\}$ найдите пары с равными модулями. Какие это пары?

Операции с координатами векторов

Зная координаты нескольких векторов в данном базисе, очень легко находить координаты их суммы или разности в этом базисе, а также координаты этих векторов, умноженных на произвольные числа. Для этого необязательно рисовать вектор суммы или разности самих векторов. Достаточно просто сложить или вычесть их координаты. Так же и при умножении вектора на любое число можно просто умножить на это число каждую его координату. А почему это можно сделать, показывает следующая теорема.

Чему равна сумма координат трёх векторов, идущих из центра равностороннего треугольника во все его вершины?

ТЕОРЕМА

1. При сложении или вычитании векторов в данном базисе их координаты соответственно складываются или вычитаются.
2. При умножении вектора на действительное число все его координаты умножаются на это число.

$\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$
$\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$
$\vec{a} + \vec{b}\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2\}$
$\vec{a} - \vec{b}\{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2\}$
$k\vec{a}\{kx_1;\ ky_1\}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Докажем первое утверждение теоремы. Пусть вектор $\vec{a}$ в базисе векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ имеет координаты $\{x_1;\ y_1\}$, а вектор $\vec{b}$ в том же базисе имеет координаты $\{x_2;\ y_2\}$. Давайте вычислим в той же системе координаты суммы $\vec{a} + \vec{b}$ и разности $\vec{a} - \vec{b}$ этих векторов.

Разложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по базисным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$: $\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$, $\vec{b} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}$.

Если теперь мы сложим эти векторы друг с другом или вычтем один из другого, а потом сгруппируем слагаемые по базисным векторам системы, то получим

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}\right) + \left(x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}\right) = (x_1 + x_2) \cdot \vec{i} + (y_1 + y_2) \cdot \vec{j};$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \left(x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}\right) - \left(x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}\right) = (x_1 - x_2) \cdot \vec{i} + (y_1 - y_2) \cdot \vec{j}.$$

Эти разложения показывают, что координаты суммы $\vec{a} + \vec{b}$ данных векторов равны $(x_1 + x_2)$; $(y_1 + y_2)$, а координаты их разности $\vec{a} - \vec{b}$ равны $(x_1 - x_2)$; $(y_1 - y_2)$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Примерно так же можно доказать второе утверждение теоремы. Пусть произвольный вектор $\vec{c}$ в базисе векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ имеет координаты $\{x; y\}$. Разложим его по базису $\vec{i}$ и $\vec{j}$: $\vec{c} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.

А теперь умножим вектор $\vec{c}$ на действительное число k и раскроем скобки по свойству умножения вектора на число: $k \cdot \vec{c} = k \cdot \left(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}\right) = \left(k \cdot x\right) \cdot \vec{i} + \left(k \cdot y\right) \cdot \vec{j}$.

Эта запись означает, что координаты вектора $k \cdot \vec{c}$ в базисе векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ равны $(k \cdot x)$ и $(k \cdot y)$. То есть они получаются из координат вектора $\vec{c}$ умножением на число k.

Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

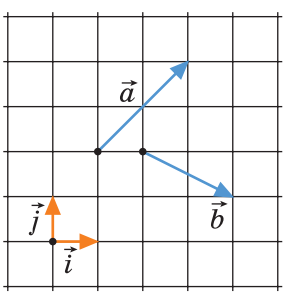
10. Запишите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$, $4\vec{a} + 3\vec{b}$, $2\vec{a} - 0{,}3\vec{b}$, если $\vec{a}\{2; 3\}$, $\vec{b}\{-10; 20\}$.

11. Найдите длину векторов $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a}\{2; -1\}$, $\vec{b}\{-1; 3\}$.

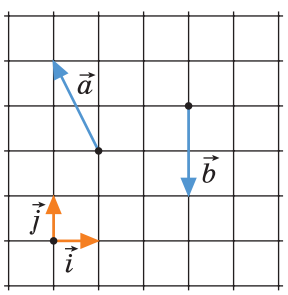
12. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на рисунках расположены в прямоугольном базисе единичных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (рис. 21). Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Рис. 21

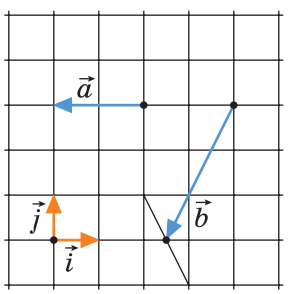
а)



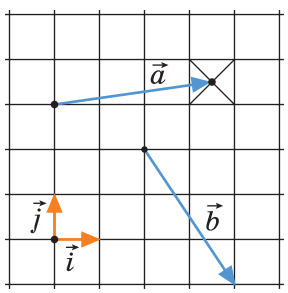
б)



в)



г)



Координаты коллинеарных векторов

Как вы уже знаете, если два вектора коллинеарны, то один из них может быть получен из другого умножением на некоторое действительное число. Похожее утверждение можно сформулировать для координат таких векторов.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

СВОЙСТВО КОЛЛИНЕАРНЫХ ВЕКТОРОВ

Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Предположим, что векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ коллинеарны. Тогда существует такое действительное число k, что $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$. Поскольку при умножении вектора на число k все его координаты тоже умножаются на k, можно написать, что $x_1 = k \cdot x_2$ и $y_1 = k \cdot y_2$.

Отсюда следует, что $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$.

Это значит, что координаты коллинеарных векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ относятся одинаково, то есть они пропорциональны.

Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

13. Сформулируйте и докажите признак коллинеарных векторов.

14. Среди векторов $\vec{a}\{2; -2\}$, $\vec{b}\{3; 5\}$, $\vec{c}\{5; 3\}$, $\vec{d}\{-10; 10\}$, $\vec{e}\{12; 20\}$ найдите пары коллинеарных. Какие это пары?

15. Найдите координаты вектора $\vec{a}\{x; y\}$, если его длина равна 10 и он параллелен вектору $\vec{b}\{-3; 4\}$.

Координаты точек на плоскости

Базис двух неколлинеарных векторов задаёт систему координат на всей плоскости, поскольку каждая её точка в этой системе имеет свои уникальные координаты. Началом координат считают точку O, из которой выходят базисные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Как же по ним определить координаты произвольной точки A? Делают это так: из начала координат в точку A проводят отрезок $\overrightarrow{OA}$ и считают, что точка A имеет те же самые координаты, что и вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 22). Такой вектор мы будем называть **радиус-вектором**. Почему так делают? На самом деле это вполне логично — координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ показывают, каким образом в точку A можно попасть из начала координат O.

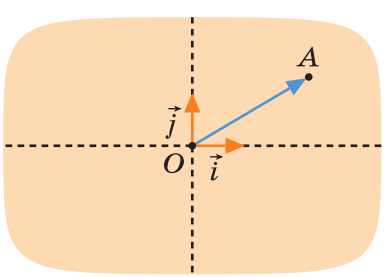
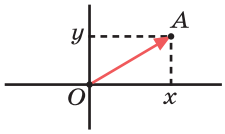


Рис. 22

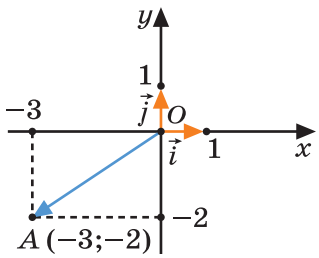
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Можно даже сказать, что вектор $\overrightarrow{OA}$ — это стрелка, которая указывает из начала координат на данную точку A. Давайте запишем определение радиус-вектора и координаты точки в системе координат.

Вектор, идущий из начала координат в данную точку плоскости, называют **радиус-вектором**. Координаты точки на плоскости совпадают с координатами радиус-вектора, проведённого в эту точку.



В любую точку плоскости из начала координат можно провести радиус-вектор, поэтому у каждой точки есть пара координат. Их обозначают так же, как и координаты вектора: пишут пару этих чисел в порядке соответствия координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и помещают их в скобки. Например, запись $A(-3; -2)$ означает, что точка A или радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$ в базисе $\vec{i}$ и $\vec{j}$ имеет координаты -3 и -2 (рис. 23).



Радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$

Рис. 23

УПРАЖНЕНИЯ

16. На координатной плоскости, разбитой на квадраты, отмечены точки A, B, C и D (рис. 24). Запишите координаты радиус-векторов для каждой из них.

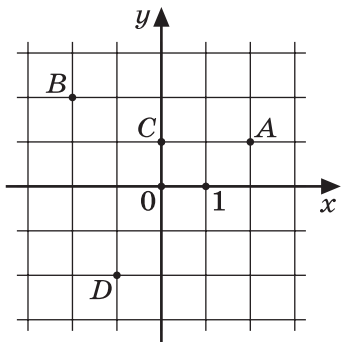


Рис. 24

Если на координатной плоскости изобразить вектор, то у начала и конца этого вектора в данной системе будут свои координаты. Как связаны координаты самого вектора с координатами его концов? На это отвечает следующая теорема.



ТЕОРЕМА

Координаты вектора в данной системе равны разностям координат его конца и начала.

$\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}$

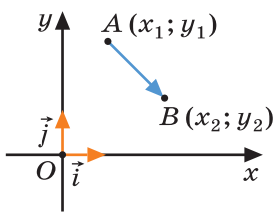
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет начало в точке $A(x_1;\ y_1)$, а конец в точке $B(x_2;\ y_2)$ (рис. 25, *а*). Проведём в эти точки радиус-векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ из начала координат O (рис. 25, *б*). Тогда по правилу сложения векторов $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Как вы помните, при вычитании векторов их координаты соответственно вычитаются, поэтому координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ будут равны $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$.

Что и требовалось доказать.

а)



б)

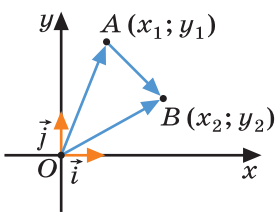


Рис. 25

УПРАЖНЕНИЯ

17. Напишите координаты точки B, если вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты 2 и 3, а координаты точки A равны 3 и -2.

18. Найдите координаты точек A и B, изображённых на рисунке 26, если отрезки OA и OB имеют длину 2.

19. Лежат ли точки $A(-2;\ 3)$, $B(0;\ 4)$ и $C(50;\ 29)$ на одной прямой?

20. Найдите координату x точки C, если точки $A(0;\ 1)$, $B(2;\ 5)$ и $C(x;\ 20)$ лежат на одной прямой.

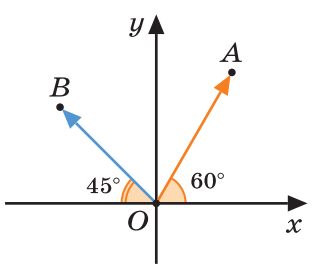


Рис. 26

Расстояние между точками на плоскости

Между любыми двумя точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ на плоскости можно провести вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 27). По определению модуль вектора — это просто длина отрезка AB. Мы с вами знаем, что в системе Декарта длину вектора можно выразить через его координаты по теореме Пифагора. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$.

Поэтому для длины отрезка AB в системе Декарта справедлива такая формула: $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Мы запишем её как формулу расстояния между точками.

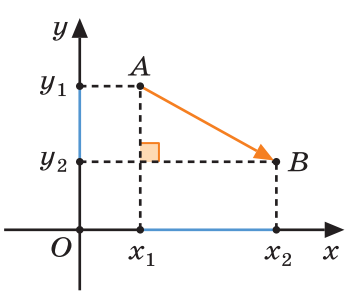
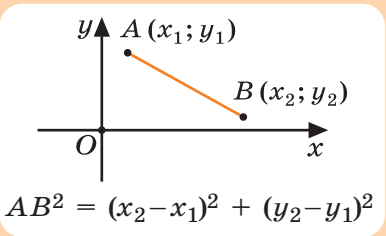


Рис. 27

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

Квадрат расстояния между точками на плоскости Декарта равен сумме квадратов разностей координат его концов.



$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

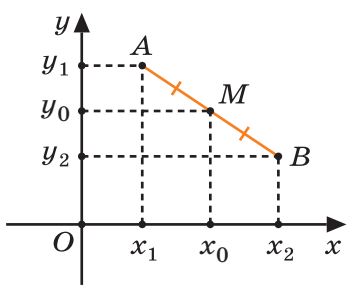
УПРАЖНЕНИЯ

21. Найдите длины всех отрезков, которые соединяют точки $A(-1;\ 3)$, $B(3;\ 0)$ и $C(2;\ 7)$.

22. Точка $C(x_3;\ y_3)$ лежит на отрезке AB между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. Докажите, что выполняется равенство $\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Координаты середины отрезка

Векторный подход позволяет легко находить координаты середины данного отрезка, если известны координаты его концов. Давайте запишем свойство середины отрезка.



СВОЙСТВО СЕРЕДИНЫ ОТРЕЗКА

Координаты середины отрезка равны среднему арифметическому координат его концов.

$$x_0 = (x_1 + x_2) : 2$$
$$y_0 = (y_1 + y_2) : 2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть M — середина отрезка AB, соединяющего точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. Обозначим координаты точки M как $(x_0;\ y_0)$ и проведём радиус-векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OM}$ (рис. 28). Поскольку OM — медиана треугольника AOB, то по свойству вектора медианы должно быть $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

Координата точки на плоскости совпадает с координатой радиус-вектора, проведённого в эту точку. Значит, вектор $\overrightarrow{OM}$ будет иметь координаты $\{x_0;\ y_0\}$, а векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ соответственно $\{x_1;\ y_1\}$ и $\{x_2;\ y_2\}$.

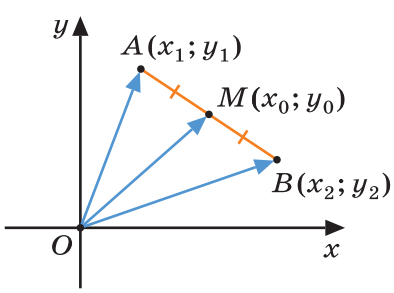


Рис. 28

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Поэтому $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ и $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$.

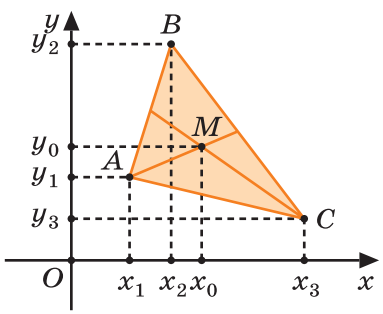
Значит, координаты точки M — середины отрезка AB равны среднему арифметическому координат его концов.

Что и требовалось доказать.

Координаты центра масс треугольника

В предыдущем параграфе мы определили центр масс треугольника как точку, для которой сумма векторов, отложенных в вершины этого треугольника, равна нулю. Также мы выяснили, что центр масс треугольника находится в точке пересечения его медиан. Но какие координаты имеет центр масс треугольника относительно его вершин? Оказывается, для координат этой точки существует совершенно естественная формула, выражающая их через координаты вершин данного треугольника.

Давайте запишем эту формулу как свойство координат центра масс.



КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА МАСС ТРЕУГОЛЬНИКА

Координаты центра масс треугольника равны среднему арифметическому координат всех его вершин.

$$x_0 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y_0 = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть вершины треугольника находятся в точках $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$. Обозначим центр масс треугольника точкой M, а её координаты как $(x_0; y_0)$ (рис. 29).

Запишем каждый из радиус-векторов, идущих в вершины треугольника через радиус-вектор точки M: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}$.

Если мы сложим эти три равенства, то получим $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3 \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Теперь вспомним, что по определению центра масс $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Поэтому мы получаем векторное равенство: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3 \cdot \overrightarrow{OM}$.

Координаты радиус-векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OM}$ по определению совпадают с координатами вершин треу-

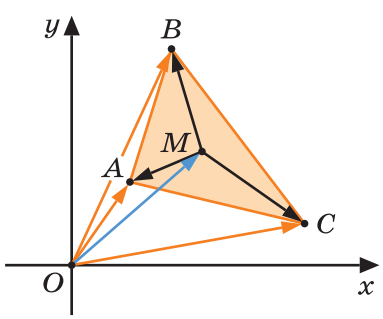


Рис. 29

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

гольника ABC и точки M, поэтому полученное равенство в координатах будет выглядеть так:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \cdot x_0 \quad y_1 + y_2 + y_3 = 3 \cdot y_0.$$

Откуда следует, что $x_0 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ и $y_0 = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

Таким образом, координаты центра масс (точки пересечения медиан) треугольника равны среднему арифметическому координат всех его вершин.

Что и требовалось доказать.

☞ Точно так же можно доказать, что координаты центра масс произвольного многоугольника равны среднему арифметическому координат всех его вершин.

Скалярное умножение

Физики иногда шутят, говорят, что «работа — это не волк, а произведение силы на перемещение». Действительно, если вы «из болота вытянули бегемота» или затащили свои санки в гору, то вы совершили работу. Когда направления силы и перемещения совпадают, то работа будет со знаком плюс, если они противоположные — со знаком минус.



Сила может вообще не совершать работы, если её направление всё время будет перпендикулярно перемещению тела. Так при движении спутника по орбите вокруг Земли действующая на него сила тяжести не совершает никакой работы. Именно поэтому спутник не теряет свою энергию и может оставаться на орбите сотни лет.

Любую силу, действующую на тело, можно как вектор разложить по двум направлениям: параллельному перемещению тела и перпендикулярному ему. Вот почему, когда направления силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{S}$ тела образуют между собой угол φ (рис. 30), то работа A этой силы будет равна произведению перемещения тела на проекцию данной силы вдоль этого перемещения. А если записать это формулой, то получится так: $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\varphi$.

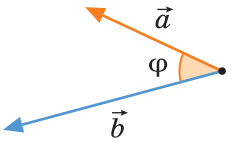


Рис. 30

Именно данное произведение модулей двух векторов на косинус угла между ними физик и создатель векторного исчисления Уильям Гамильтон принял за операцию умножения двух векторов. А поскольку работа — это величина без направления, то такое умножение двух векторов будет просто числом, или скаляром. Поэтому его и называют скалярным произведением. Скоро вы узнаете, что такое произведение векторов действительно во многом похоже на умножение чисел. Но сначала запишем его определение.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

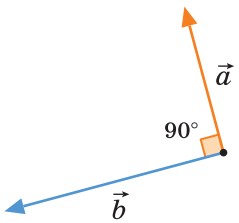
Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют величину $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

Обратите внимание: из данного определения следует, что скалярное произведение вектора на себя (или так называемый скалярный квадрат вектора) равно квадрату его модуля, то есть $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$. Так будет просто потому, что $\cos 0° = 1$.

Кроме того, есть ещё один важный частный случай: если угол между двумя векторами равен $90°$, то их скалярное произведение равно нулю (рис. 31). И в этом опять виноват косинус, входящий в данное произведение, так как $\cos 90° = 0$.



Если $\varphi = 90°$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

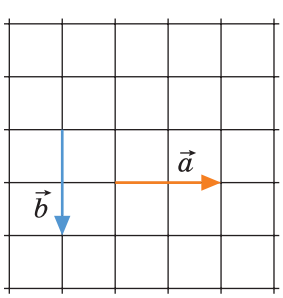
Рис. 31

УПРАЖНЕНИЯ

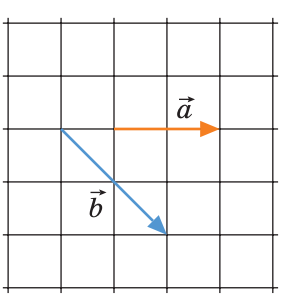
23. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на рисунках, если сторона одной клетки равна 1 (рис. 32).

Рис. 32

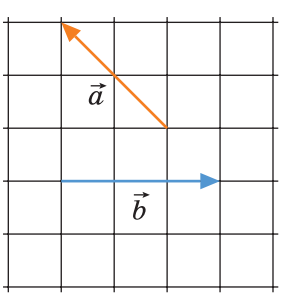
а)



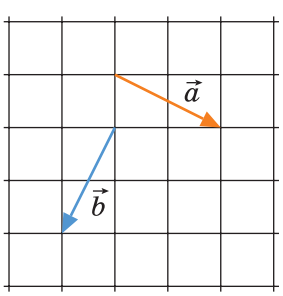
б)



в)



г)



24. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 1. Точка M — середина его стороны AC. Найдите:
а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}$; г) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM}$;
д) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM}$.

25. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1. Найдите:
а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$;
д) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$; е) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

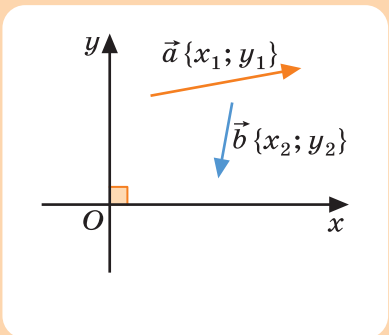
Выражение скалярного произведения через координаты

В прямоугольной системе Декарта скалярное произведение двух векторов может быть выражено через их координаты по красивой и симметричной формуле. И об этом говорит следующая теорема.

ТЕОРЕМА

В прямоугольной системе Декарта скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующих координат.

Это значит, что для векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ их скалярное произведение можно вычислить по формуле: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть в прямоугольной системе Декарта вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x_1; y_1\}$, а вектор $\vec{b}$ — координаты $\{x_2; y_2\}$. Мы разберём случай, когда эти векторы неколлинеарны. Отложим их от начала координат O и обозначим как $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (рис. 33).

Тогда угол AOB будет равен φ — углу между данными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Координаты радиус-векторов совпадают с координатами их концов, поэтому точка A будет иметь координаты $(x_1; y_1)$, а точка B — координаты $(x_2; y_2)$.

Запишем для треугольника AOB теорему косинусов: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\varphi$.

Квадраты его сторон OA, OB и AB найдём по формуле расстояния между точками: $OA^2 = (x_1)^2 + (y_1)^2$, $OB^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2$, $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Подставим полученные выражения в равенство теоремы косинусов и раскроем скобки:

$$(x_1)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + (x_2)^2 + (y_1)^2 - 2 \cdot y_1 \cdot y_2 + (y_2)^2 = \\ = (x_1)^2 + (y_1)^2 + (x_2)^2 + (y_2)^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\varphi.$$

Откуда после упрощения получаем:

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = OA \cdot OB \cdot \cos\varphi.$$

Поскольку скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ по определению равно $OA \cdot OB \cdot \cos\varphi$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Что и требовалось доказать.

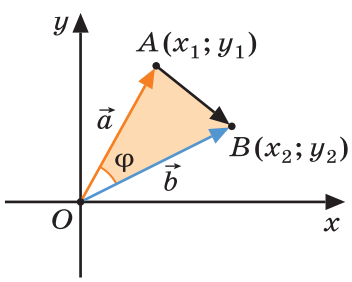


Рис. 33

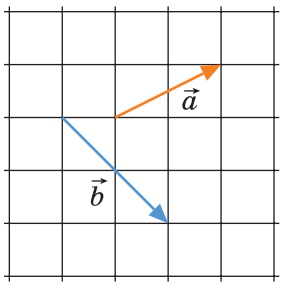
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

УПРАЖНЕНИЯ

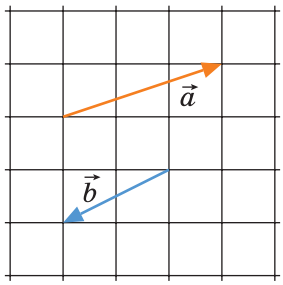
26. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на рисунках, если сторона одной клетки равна 1 (рис. 34).

Рис. 34

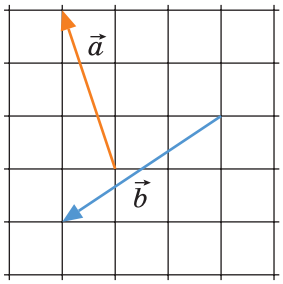
а)



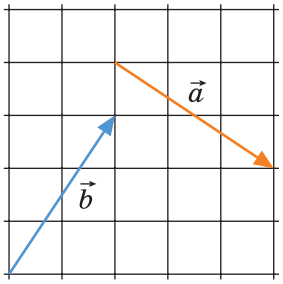
б)



в)



г)



27. Докажите формулу, выражающую скалярное произведение через координаты для двух коллинеарных векторов.

Свойства скалярного умножения

Скалярное умножение векторов во многом напоминает умножение обычных чисел. А происходит так потому, что эта операция обладает теми же свойствами или правилами, которыми мы привыкли пользоваться, работая с действительными числами. Например, несколько чисел можно перемножать в любом порядке, и от этого результат не изменится. Или известное вам правило раскрытия скобок: при умножении числа на сумму нескольких слагаемых его нужно умножить на каждое из них, а потом всё сложить. Давайте выпишем аналогичные правила, то есть свойства для скалярного умножения векторов.

Чем свойства скалярного умножения векторов отличаются от умножения обычных чисел?

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО УМНОЖЕНИЯ

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2 = a^2$ для любого вектора $\vec{a}$.
3. $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и действительного числа k.
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Первые три свойства очевидно следуют из определения скалярного произведения двух векторов. Давайте докажем четвёртое свойство, которое математики называют *дистрибутивным законом* или правилом раскрытия скобок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть в прямоугольной системе Декарта вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x_1; y_1\}$, вектор $\vec{b}$ — координаты $\{x_2; y_2\}$, а вектор $\vec{c}$ — координаты $\{x_3; y_3\}$. Тогда сумма векторов $\vec{a} + \vec{b}$ будет иметь координаты $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$. Выразим в координатах скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (x_1 + x_2) \cdot x_3 + (y_1 + y_2) \cdot y_3 = x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 + y_1 \cdot y_3 + y_2 \cdot y_3$.

В последней строке мы привычно раскрыли скобки, поскольку работали с координатами, то есть обычными числами. Теперь распишем в координатах правую часть равенства $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 + y_1 \cdot y_3 + y_2 \cdot y_3$. Мы получили то же самое выражение.

Значит, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Что и требовалось доказать.

Если в доказанном нами свойстве векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимать как силы, действующие на материальное тело, а вектор $\vec{c}$ как перемещение этого тела, то данное свойство получит очевидное толкование с точки зрения физики: работа суммы $\vec{a} + \vec{b}$ двух сил по перемещению $\vec{c}$ тела равна сумме работ, совершаемых силами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при том же перемещении $\vec{c}$.

Свойства скалярного умножения позволяют работать с векторами как с обычными числами и пользоваться всеми алгебраическими формулами сокращённого умножения для сумм и разностей чисел. Только нужно помнить, что скалярное произведение двух векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$ не равно просто произведению $a \cdot b$ их модулей. Например, будут справедливы такие формулы:

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2 = a^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2;$$

$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = (\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = (\vec{a})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2 = a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2.$$

Интересно, что формула квадрата разности двух векторов отражает не что иное, как известную вам теорему косинусов.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

УПРАЖНЕНИЯ

28. Покажите, как из формулы $(\vec{a} - \vec{b})^2 = a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2$ следует теорема косинусов для треугольника со сторонами a, b и c (рис. 35).

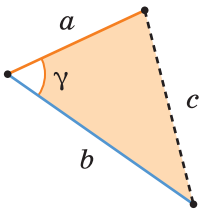


Рис. 35

29. Какую теорему, связанную с параллелограммом, заключает в себе соотношение $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2a^2 + 2b^2$? Преобразуйте данные выражения: а) $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$; б) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$.

30. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если стороны параллелограмма равны 3 и 4 (рис. 36).

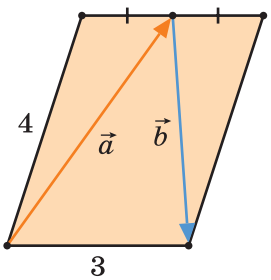


Рис. 36

Скалярное произведение и тригонометрия

С помощью скалярного произведения векторов можно легко доказать одну из самых важных формул тригонометрии — формулу косинуса разности двух углов:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Возьмём на тригонометрическом круге такие точки A и B, что радиусы OA и OB образуют с положительной осью x соответственно углы α и β (рис. 37). Тогда угол AOB будет равен разности этих углов $\alpha - \beta$.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Их длины равны 1, так как это радиусы тригонометрической окружности.

Значит, можно найти их скалярное произведение: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(\alpha - \beta)$.

Вы помните, что углы на тригонометрической окружности откладывают от положительной оси x, а координаты точки на ней — это синус и косинус этого угла? Значит, радиус-векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ будут иметь следующие координаты: $\overrightarrow{OA}\{\cos\alpha; \sin\alpha\}$ и $\overrightarrow{OB}\{\cos\beta; \sin\beta\}$. Запишем теперь скалярное произведение данных векторов через их координаты $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Нам остаётся лишь приравнять полученные выражения и получить нужную формулу:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

Что и требовалось доказать.

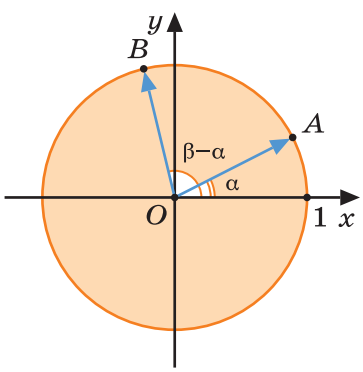


Рис. 37

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ВОПРОСЫ

1. Какие векторы могут образовывать базис системы координат?
2. Какие два вектора образуют систему Декарта?
3. В чём заключается лемма о коллинеарных векторах?
4. Что такое координаты вектора в базисе? Какие координаты имеет вектор $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ в базисе $\vec{i}$ и $\vec{j}$?
5. Что такое радиус-вектор? Какая связь между координатами радиус-вектора и координатами точки на координатной плоскости?
6. Как выражаются на координатной плоскости координаты вектора через координаты его концов?
7. Что происходит с координатами векторов, когда векторы складывают, вычитают, умножают на действительное число?
8. Что вы знаете о координатах коллинеарных векторов?
9. Как найти длину вектора, зная его координаты в системе Декарта?
10. Как выражается расстояние между точками через их координаты в системе Декарта?
11. Как выражаются координаты середины отрезка через координаты его концов?
12. Как выражаются координаты центра масс треугольника через координаты его вершин?
13. Что такое скалярное произведение двух векторов?
14. Когда скалярное произведение равно нулю? Может ли оно быть меньше нуля?
15. Как связано скалярное произведение векторов с физикой?
16. Как выражается скалярное произведение двух векторов через их координаты векторов в системе Декарта?
17. Какими свойствами обладает скалярное умножение векторов?
18. Как связана со скалярным произведением формула косинуса разности двух углов?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1. ★☆☆ Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}\{3; -3\}$ и $\vec{b}\{7; 1\}$ в системе Декарта.

РЕШЕНИЕ

Для решения этой задачи нет необходимости рисовать систему координат. Достаточно найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ двумя способами. С одной стороны, его можно выразить через координаты этих векторов по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 7 + (-3) \cdot 1 = 18$.

С другой стороны, по определению можно написать, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Выразим квадраты модулей векторов через их координаты по теореме Пифагора: $|\vec{a}|^2 = 3^2 + (-3)^2 = 18$, $|\vec{b}|^2 = 7^2 + 1^2 = 50$. Откуда $|\vec{a}| = 3\sqrt{2}$ и $|\vec{b}| = 5\sqrt{2}$.

Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos\varphi = 30 \cdot \cos\varphi$.

Приравняем полученные нами выражения для скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b}$: $18 = 30 \cos\varphi$. Откуда $\cos\varphi = 0{,}6$.

Ответ: 0,6.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ПРИМЕР 2. ★☆☆ Стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ равны 2 и 3, а угол между ними равен 60°. Точки E и K — середины его сторон BC и CD (рис. 38). Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BK}$.

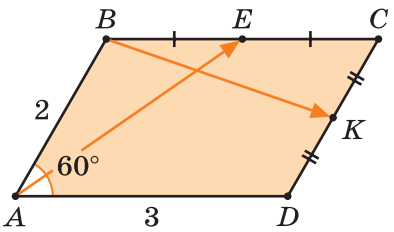


Рис. 38

РЕШЕНИЕ

Расположим на сторонах параллелограмма векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (рис. 39). А теперь выразим через них векторы $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BK}$: $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{BK} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

Теперь запишем их скалярное произведение:

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BK} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{3}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{b}|^2.$$

По условию $|\vec{a}| = AB = 2$, $|\vec{b}| = AD = 3$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по определению равно $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60° = 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 3$. Поэтому

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BK} = \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot (2)^2 + \frac{1}{2} \cdot (3)^2 = 4{,}75.$$

Ответ: 4,75.

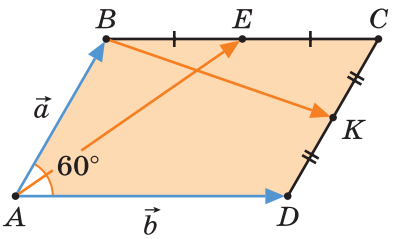
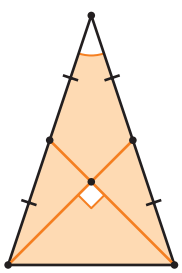


Рис. 39

ПРИМЕР 3. ★☆☆ Медианы, проведённые к боковым сторонам равнобедренного треугольника, перпендикулярны (рис. 40). Найдите косинус угла между этими сторонами.


Рис. 40

РЕШЕНИЕ

Пусть медианы AK и CM, проведённые к боковым сторонам равнобедренного треугольника ABC, перпендикулярны друг другу. Расположим на боковых сторонах этого треугольника векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, что $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{KC} = \vec{b}$ (рис. 41). Тогда $\overrightarrow{AK} = \vec{b} - 2\vec{a}$, $\overrightarrow{CM} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

Векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{CM}$ перпендикулярны друг другу, значит, их скалярное произведение равно нулю. Поэтому $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{CM} = (\vec{b} - 2\vec{a}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = \vec{0}$.

Если мы раскроем скобки, то получим уравнение $5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2(\vec{a})^2 - 2(\vec{b})^2 = 0$.

А теперь вспомним, что квадрат вектора равен квадрату его модуля, то есть $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$ и $(\vec{b})^2 = |\vec{b}|^2$.

Обозначим угол между боковыми сторонами треугольника за φ и выразим через него скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$.

Поскольку данный нам треугольник равнобедренный, то $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Для удобства длину этих отрезков примем за 1. Тогда мы получим уравнение $5 \cdot \cos\varphi - 4 = 0$.

Откуда $\cos\varphi = 0{,}8$.

Ответ: 0,8.

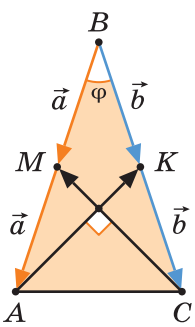


Рис. 41

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ПРИМЕР 4. ★★☆ В равнобедренном треугольнике ABC точка M — середина боковой стороны BC, точка K — середина отрезка AM, а точка O — середина BK. Найдите косинус угла ABC, если прямые CO и AB перпендикулярны (рис. 42).

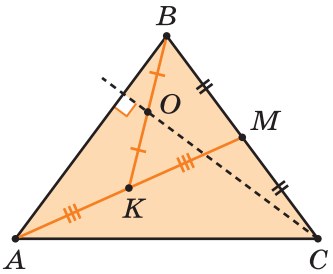


Рис. 42

РЕШЕНИЕ

Расположим на боковых сторонах AB и BC данного треугольника векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, что $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC} = \vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{BK}$ будет вектором медианы треугольника ABM, поэтому $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Поскольку точка O — середина отрезка BK (рис. 43), то $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})$.

Выразим вектор $\overrightarrow{CO}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из треугольника BOC: $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) - 2\vec{b} = \frac{1}{4}(\vec{a} - 7\vec{b})$.

По условию прямые CO и AB перпендикулярны. Значит, векторы $\overrightarrow{CO}$ и $\overrightarrow{BA}$ перпендикулярны друг другу, поэтому их скалярное произведение равно нулю. Давайте это запишем: $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(\vec{a} - 7\vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{0}$. После раскрытия скобок получим такое равенство: $(\vec{a})^2 = 7\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Давайте теперь вспомним, что $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$ и по определению $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда $|\vec{a}|^2 = 7|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$. Значит, $|\vec{a}| = 7|\vec{b}| \cdot \cos\varphi$.

Треугольник ABC равнобедренный, поэтому $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$. Тогда $2|\vec{b}| = 7|\vec{b}| \cdot \cos\varphi$. Откуда $\cos\varphi = \frac{2}{7}$. По тригонометрической таблице можно найти, что угол $\varphi \approx 73°$.

Ответ: $\frac{2}{7}$.

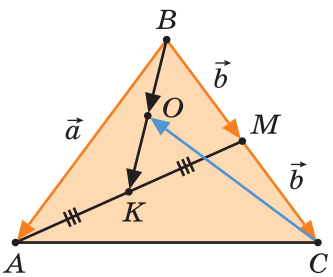


Рис. 44

ПРИМЕР 5. ★★☆ Вершины треугольника имеют координаты (1; 4), (3; 0) и (4; 5). Найдите координаты точки пересечения его высот.

РЕШЕНИЕ

Пусть вершины треугольника находятся в точках $A(1; 4)$, $B(3; 0)$ и $C(4; 5)$. Обозначим точку пересечения высот треугольника ABC буквой H, а её координаты как $(x; y)$ (рис. 44).

Сначала найдём координаты векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{BC}\{1; 5\}$ и $\overrightarrow{AC}\{3; 1\}$.

Теперь выразим через x и y координаты векторов $\overrightarrow{HA}$ и $\overrightarrow{HB}$: $\overrightarrow{HA}\{1 - x; 4 - y\}$, $\overrightarrow{HB}\{3 - x; 0 - y\}$.

Так как точка H лежит на высоте треугольника ABC, то векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{BC}$ перпендикулярны. Значит, их скаляр-

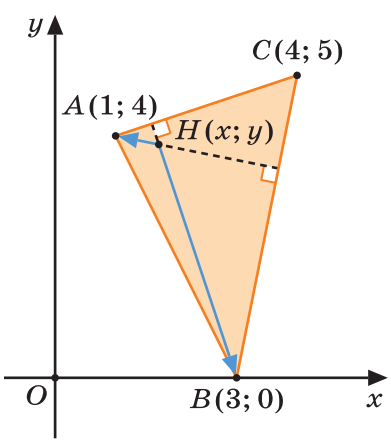


Рис. 43

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ное произведение равно нулю. Запишем его через координаты этих векторов: $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = (1 - x) \cdot 1 + (4 - y) \cdot 5 = 0$.

Откуда $x + 5y = 21$.

Точно так же должны быть перпендикулярны векторы $\overrightarrow{HB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Запишем, что их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = (3 - x) \cdot 3 + (-y) \cdot 1 = 0$.

Откуда $3x + y = 9$.

Таким образом, мы получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 5y = 21, \\ 3x + y = 9. \end{cases}$$

Откуда найдём, что $x = \frac{12}{7}$, $y = \frac{27}{7}$. Значит, высоты треугольника ABC пересекаются в точке $H\left(\frac{12}{7}; \frac{27}{7}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{12}{7}; \frac{27}{7}\right)$.

ПРИМЕР 6. ★★★ В окружность радиуса R вписан треугольник с углами 15° и 60°. Найдите расстояние от её центра до точки пересечения медиан этого треугольника (рис. 45).

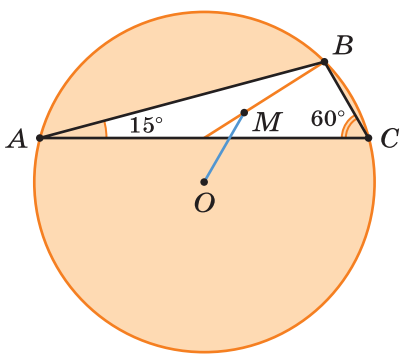


Рис. 45

РЕШЕНИЕ

Пусть в окружность с центром O и радиусом R вписан треугольник ABC, углы которого при вершинах A и C соответственно равны 15° и 60°. Давайте проведём векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ в его вершины. Модули этих векторов будут равны радиусу окружности R.

По теореме центральный угол BOC будет в два раза больше вписанного угла BAC, поэтому он равен 30°. Точно так же угол AOB будет в два раза больше угла BCA и равен 120° (рис. 46).

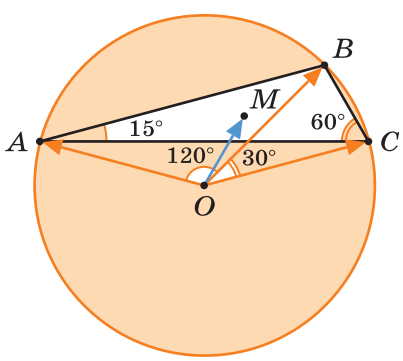


Рис. 46

Запишем каждый из векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ через вектор $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}$. Если мы сложим эти равенства, то получим $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Поскольку точка M пересечения медиан является центром масс треугольника ABC, то сумма векторов, идущих из неё в его вершины, равна нулю. То есть $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Отсюда следует, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OM}$.

Помните, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины? Чтобы получить длину отрезка OM, просто возведём последнее равенство в квадрат: $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 = \left(3\overrightarrow{OM}\right)^2$.

Раскроем в правой его части скобки так же, как делаем это с обычными числами, — это позволяют сделать свойства скалярного умножения. Тогда мы получим $|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 9|\overrightarrow{OM}|^2$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Заметим, что $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = R$. А входящие в него скалярные произведения запишем по определению: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = R^2\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}R^2$; $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = R^2\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$; $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = R^2\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}R^2$. Тогда мы получим равенство: $3R^2 - R^2 + \sqrt{3}R^2 - \sqrt{3}R^2 = 9\cdot OM^2$.

Откуда $9 \cdot OM^2 = 2R^2$. Поэтому $OM = \frac{\sqrt{2}}{3}R$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}R$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ЗАДАЧИ

1. ★☆☆ На клетчатой бумаге, сторона клетки которой равна 1, изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
Найдите: а) $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})$; б) $(\vec{a} - \vec{c})^2$; в) $(\vec{a} + 2\vec{c}) \cdot (3\vec{b} - \vec{c})$. (▸▸ рис.)

2. ★☆☆ На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$.
Найдите: а) $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{d})$;
б) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})^2$. (▸▸ рис.)

3. ★☆☆ Найдите длину вектора $2\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}\{5; 9\}$ и $\vec{b}\{2; 3\}$.

4. ★☆☆ Какой угол образует вектор $\vec{a}\{-1; \sqrt{3}\}$ с положительной осью x?

5. ★☆☆ Какой угол образует вектор $\vec{b}\{1; -1\}$ с положительной осью y?

6. ★☆☆ Найдите координаты точки B, если точка A имеет координаты (5; 7), а точка M — середина отрезка AB имеет координаты (1; 2). (▸▸ рис.)

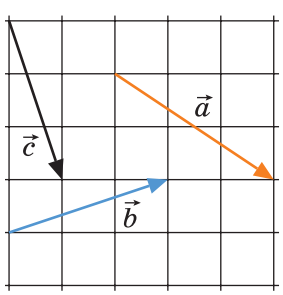
7. ★☆☆ Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если он параллелен вектору $\vec{b}\{-1; 7\}$, а по длине равен вектору $\vec{c}\{1; 1\}$.

8. ★☆☆ Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если он противоположно направлен вектору $\vec{b}\{7; 9\}$, а по длине равен вектору $\vec{c}\{-6; 22\}$.

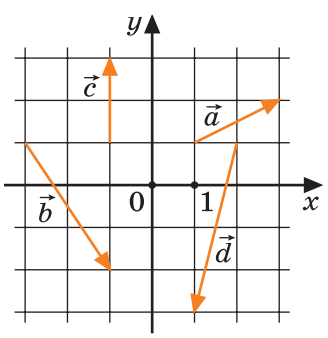
9. ★☆☆ Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ на координатной плоскости. (▸▸ рис.)

10. ★☆☆ Найдите косинус угла между векторами $(\vec{a} + \vec{b})$ и $(\vec{a} - \vec{b})$, если $\vec{a}\{7; -1\}$, $\vec{b}\{5; 5\}$.

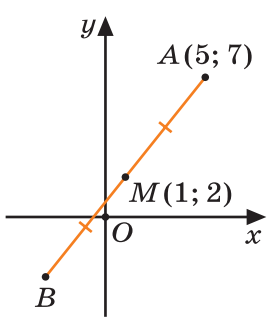
11. ★☆☆ Модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны. Найдите угол между векторами, если:
а) $|\vec{a} + 3\vec{b}| = |\vec{a} - 2\vec{b}|$;
б) $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = |\vec{a} + 2\vec{b}|$.



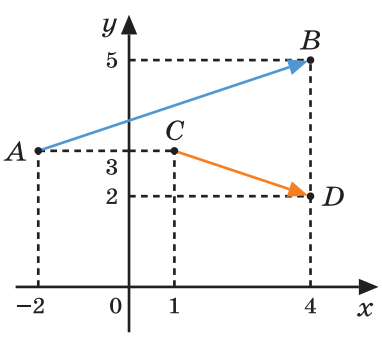
▸▸ задача 1



▸▸ задача 2

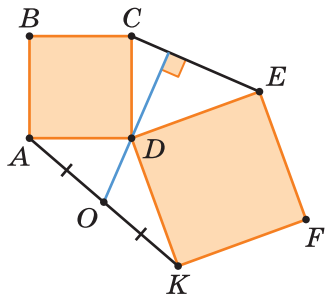


▸▸ задача 6

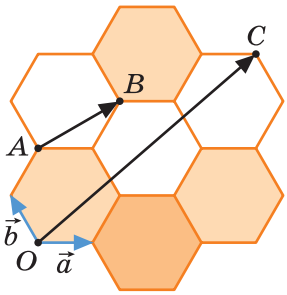


▸▸ задача 9

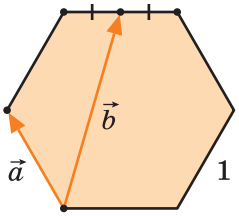
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 18



задача 20



задача 21

12. ★☆☆ Вектор $\vec{a}$, концы которого находятся на осях координат, коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$, с концами в точках A (–5; 2) и B (10; 10). Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если он имеет длину 3,4.

13. ★☆☆ Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если его модуль равен 10 и он перпендикулярен вектору $\vec{b}\{4; 3\}$.

14. ★☆☆ Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ соответственно равны 2 и 3. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

15. ★☆☆ Сторона ромба $ABCD$ равна 1, угол BCD равен 60°. Точки M и K — середины сторон AD и CD. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BM}$.

16. ★☆☆ Стороны AB, BC и AC треугольника ABC соответственно равны 2, 3 и 4. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

17. ★☆☆ Докажите, что произведение диагоналей параллелограмма на косинус угла между ними равно разности квадратов его сторон.

18. ★☆☆ Квадраты $ABCD$ и $DEFK$ имеют общую вершину. Точка O — середина отрезка AK. Докажите, что прямая DO перпендикулярна прямой CE. (▸▸ рис.)

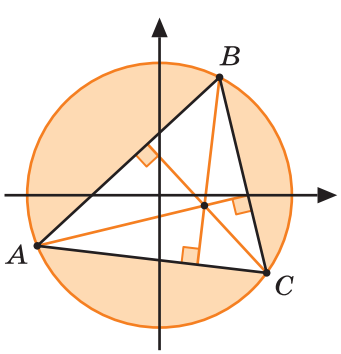
19. ★☆☆ Точка E — середина медианы AM, проведённой к боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC. Найдите косинус угла между его боковыми сторонами, если прямая CE перпендикулярна стороне AB.

20. ★★☆ На рисунке показан фрагмент пчелиных сот, ячейки которых имеют форму правильных шестиугольников. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OC}$ в базисе векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (▸▸ рис.)

21. ★★☆ Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на рисунке, если сторона показанного на нём правильного шестиугольника равна 1. (▸▸ рис.)

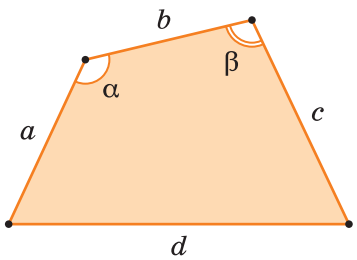
22. ★★☆ Вершины треугольника имеют координаты (3; 0), (0; 6) и (9; 15). Найдите: а) координаты точки пересечения его высот; б) квадрат расстояния между точками пересечения высот и медиан этого треугольника.

23. ★★☆ На окружности с центром в начале координат взяли произвольные точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$. Найдите координаты точки пересечения высот треугольника ABC. (▸▸ рис.)

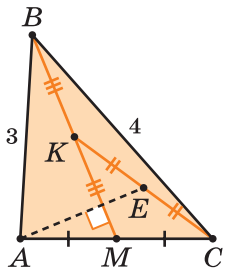


задача 23

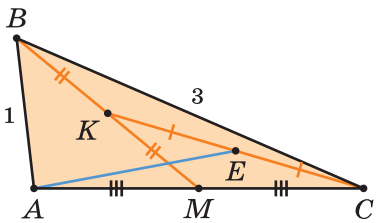
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 24



задача 25



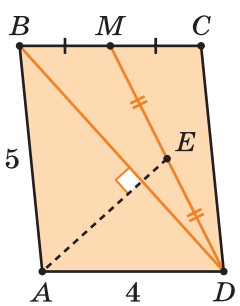
задача 26

24. ★★☆ Три стороны четырёхугольника равны a, b и c, а два угла между ними равны α и β. Докажите, что квадрат его четвёртой стороны можно вычислить по *формуле косинусов для четырёхугольника*:
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cdot\cos\alpha - 2bc\cdot\cos\beta + 2ac\cdot\cos(\alpha+\beta)$. (▸▸ рис.)

25. ★★☆ Точка K — середина медианы BM треугольника ABC. Точка E — середина отрезка KC. Найдите длину стороны AC, если известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, а отрезок AE перпендикулярен медиане BM. (▸▸ рис.)

26. ★★☆ Точка K — середина медианы BM треугольника ABC. Точка E — середина отрезка KC. Найдите длину отрезка AE, если $AB = 1$, $BC = 3$, угол ABC равен 60°. (▸▸ рис.)

27. ★★☆ Точка M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Точка E — середина отрезка MD. Найдите косинус острого угла параллелограмма, если отрезок AE перпендикулярен диагонали BD параллелограмма, а его стороны AD и AB соответственно равны 4 и 5. (▸▸ рис.)



задача 27

28. ★★★ В окружность радиуса 1 вписан треугольник с углами 45°, 60°. Найдите расстояние от её центра до точки пересечения высот треугольника.

29. ★★★ Сторона квадрата равна 1. На вписанной в него окружности взяли произвольную точку. Докажите, что сумма квадратов от неё до вершин квадрата постоянна. Найдите эту сумму.

30. ★★★ Правильный пятиугольник вписан в окружность радиуса 1. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин пятиугольника постоянна, и найдите эту сумму.

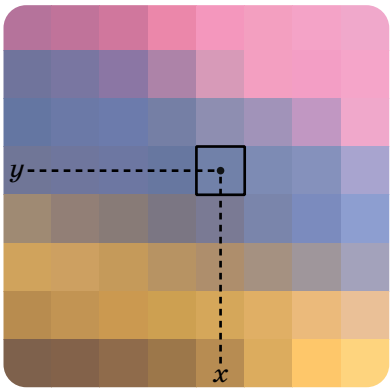
31. ★★★ Углы треугольника равны α, β и γ. Докажите, что:
$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + \frac{3}{2} \geqslant 0$.

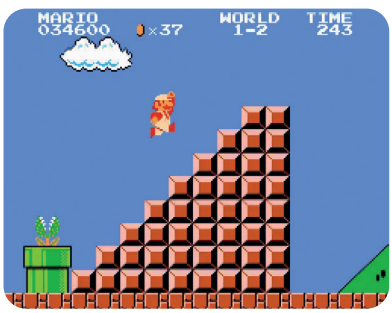
32. ★★★ Известно, что:
$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$,
$\sin\alpha + \sin\beta \cdot \sin\gamma = 0$.
Найдите $\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

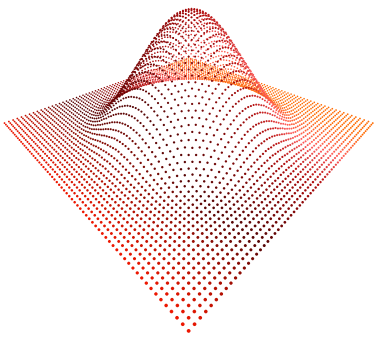
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

§9 Метод координат

Система координат, которую Рене Декарт ввёл в математику, открыла новые возможности для геометрии. Можно сказать, что всё разнообразие геометрических образов, все точки на плоскости она разложила по двум полочкам — координатам. Помните, что геометрическая фигура — это множество точек? Поэтому любую фигуру на плоскости можно описать набором пар действительных чисел — координат её точек. Но сделать это можно только теоретически, просто потому что большинство геометрических фигур состоят из бесконечного числа точек, и поэтому соответствующие им наборы (или массивы) координат тоже будут бесконечны. Однако на практике для описания фигуры или графика какой-нибудь зависимости вполне достаточно иметь большое число точек этого графика — тогда через них можно провести плавную линию и построить нужный график. Это же делает и компьютер, когда строит графики различных функций.







Геометрию, в которой все точки на плоскости представлены координатами — парами действительных чисел, стали называть аналитической. Впрочем, такая геометрия существует и в пространстве — там у каждой точки будут уже три координаты. Особое практическое значение аналитическая геометрия получила с появлением компьютеров. Вычислительная машина легко работает с огромными массивами чисел и может производить с ними различные операции с поразительной скоростью. Положение точки на экране вашего монитора определяется всего парой целых чисел. Вектор скорости этой точки в данный момент времени — это тоже две координаты. Поэтому для нахождения положения точки в следующий момент времени компьютеру нужно лишь сложить две пары этих чисел. Так легко можно задать движение точки по экрану компьютера или, например, движение робота. А чтобы определить направление, в котором роботу нужно двигаться из одной точки в другую, достаточно вычесть координаты этих двух точек и полученный результат умножить на действительное число — модуль скорости робота.

Теперь с помощью аналитической геометрии и компьютеров моделируют здания, распознают лица и образы,

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

предсказывают погоду, управляют самолётами и спутниками. Подумайте: как без системы координат мог бы работать навигатор в вашем смартфоне (рис. 1)?

Легко догадаться, что ничего из вышеперечисленного во времена Рене Декарта ещё не было, — только в конце своей жизни он узнал об изобретении Блезом Паскалем первого механического арифмометра (рис. 2). Тем не менее открытие координат на плоскости совершило революцию в математике: появилась возможность исследовать некоторые геометрические объекты с помощью алгебры. И первым применением этого метода было аналитическое исследование кривых линий. Как известно, линии в классической геометрии определяют как геометрическое место точек, удовлетворяющих данному условию. Так геометрически можно определить прямую, окружность, гиперболу или параболу. Оказывается, что линию на координатной плоскости во многих случаях можно задать всего одним уравнением, то есть равенством, которому удовлетворяют координаты всех точек этой линии. И с двумя из таких важных уравнений мы с вами познакомимся в этом параграфе. Это будут уравнения окружности и прямой.



Рис. 1

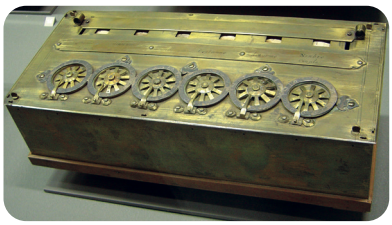


Рис. 2
Механический арифмометр Блеза Паскаля.

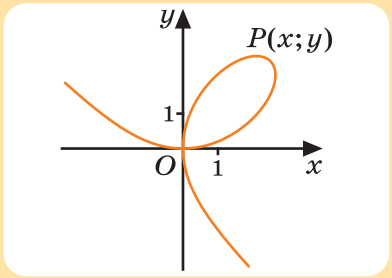
Что такое график уравнения на координатной плоскости?

Из курса алгебры вы знаете, что такое график произвольной функции. Например, графиком линейной функции $y = kx + l$ является прямая, а графиком квадратичной $y = ax^2 + bx + c$ является парабола.

По определению графиком функции $y = f(x)$ является геометрическое место точек P, координаты которых равны $(x; f(x))$. Другими словами, чтобы построить график функции $y = f(x)$ для каждого x_0 из области значений функции $f(x)$, мы должны найти значение $f(x_0)$ и отметить на координатной плоскости точку $P(x_0; f(x_0))$.

Похожим образом можно определить на плоскости и график произвольного уравнения от переменных x и y. Давайте сделаем это строго:

Графиком уравнения от переменных x и y на координатной плоскости называется множество всех точек $P(x; y)$, координаты x и y которых удовлетворяют этому уравнению.



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

УПРАЖНЕНИЯ

1. Постройте графики уравнений
а) $xy = 0$; б) $y^2 = x^2$; в) $xy - y + 2x = 2$;
г) $x^2 + y^2 = 0$; д) $(x^2 - 6x + 9)(y^2 - 3y + 2) = 0$.

2. Сформулируйте определение графика неравенства от переменных x и y. Как будут выглядеть графики неравенств:
а) $y < 2$; б) $y \geqslant 4 - 3x$; в) $x > -2y^2$; г) $yx \leqslant 1$?

С помощью уравнения можно задать некоторые линии: прямую, окружность, параболу, эллипс и многие другие, более сложные линии. Мы же ограничимся изучением уравнений прямой, окружности и полуокружности.

Уравнение прямой вида $y = kx + l$

Из курса алгебры вам хорошо известно, что графиком линейной функции $y = kx + l$ является прямая. Коэффициент l в этом уравнении показывает точку её пересечения с осью ординат (рис. 3). А коэффициент k называется **угловым коэффициентом** прямой. Из самого названия следует, что этот коэффициент связан с углом наклона прямой. Давайте введём следующее определение.

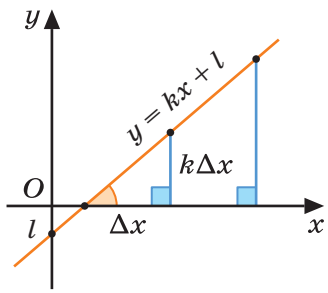
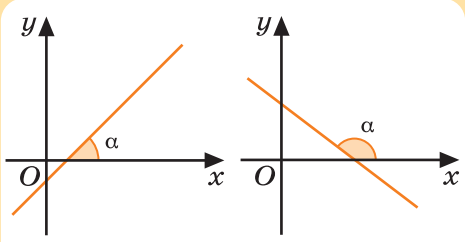


Рис. 3

Углом наклона прямой к оси Ox называется угол, который образует данная прямая с положительным направлением оси Ox координат. Угол наклона прямой принято отсчитывать от этого направления против часовой стрелки.



α — угол наклона прямой

Коэффициент k равен тангенсу угла α наклона прямой к оси Ox, то есть $k = \operatorname{tg}\alpha$. Знак углового коэффициента k показывает, является ли функция $y = kx + l$ возрастающей или убывающей.

Если $\alpha < 90°$, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$. Значит, угловой коэффициент k положительный и функция $y = kx + l$ возрастающая.

Если $\alpha > 90°$, то $\operatorname{tg}\alpha < 0$. В этом случае коэффициент k будет отрицательным, а функция убывающей.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

УПРАЖНЕНИЯ

3. Пользуясь рисунками 4, 5, докажите, что коэффициент k в уравнении $y = kx + l$ равен тангенсу угла наклона прямой к оси Ox, задаваемой этим уравнением. Разберите случаи острого и тупого угла α наклона прямой.

4. Докажите, что все точки с координатами $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $y = kx + l$, лежат на одной прямой.

5. Постройте график прямой, заданной уравнением:
а) $y = -2x$; б) $y = x + 1$;
в) $y = \frac{x}{3} + 1$; г) $2y + x + 1 = 0$.

6. Не строя график прямой $y = kx + l$, найдите коэффициент b, если известно, что эта прямая проходит через точки
а) $A(0; 11)$ и $B(3; 5)$; б) $C(-2; -3)$ и $D(2; 3)$;
в) $M(1; -1)$ и $N(7; -1)$.

7. На рисунке 6 прямая AB параллельна оси абсцисс. Найдите коэффициент угла наклона прямой AC.

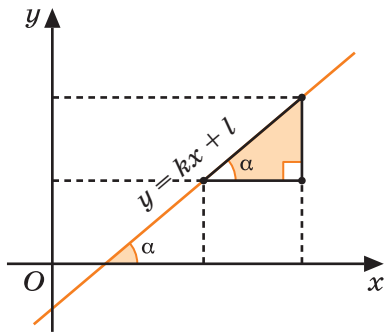


Рис. 4

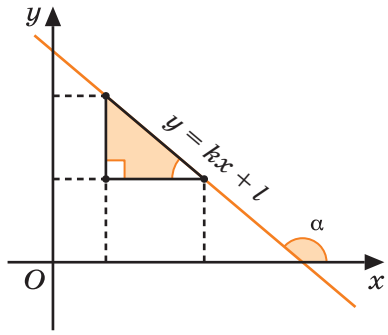


Рис. 5

Общее уравнение прямой

Уравнением прямой вида $y = kx + l$ удобно пользоваться на уроках алгебры при изучении линейной функции. С геометрической же точки зрения у него есть два недостатка. Во-первых, переменные x и y в этом уравнении неравноправны, а для геометрии на плоскости каждая из осей координат имеет одинаковую ценность. А во-вторых, с помощью уравнения $y = kx + l$ невозможно задавать прямые, параллельные оси ординат. Поэтому в геометрии чаще используют другое уравнение, которое называют *общим уравнением прямой*.

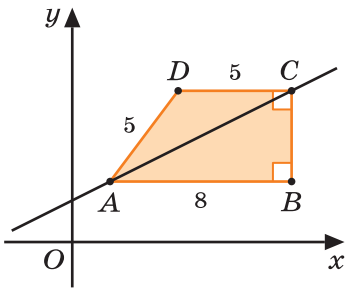


Рис. 6

Общим уравнением прямой называют уравнение вида $ax + by + c = 0$, в котором хотя бы один из коэффициентов a и b не равен 0.

$ax + by + c = 0$

Почему такое уравнение называют общим? Просто оно описывает все прямые на плоскости: горизонтальные, вертикальные и наклонные. Любое уравнение вида $y = kx + l$

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

можно записать в виде общего уравнения или, как ещё говорят, в общем виде. Это легко сделать, если в уравнении $y = kx + l$ все переменные перенести в одну часть равенства. Тогда получится такое уравнение: $kx - y + l = 0$, в котором можно считать, что $a = k$, $b = -1$, $c = l$.

Особенностью общего уравнения прямой является то, что любую прямую можно задать множеством таких уравнений. Например, уравнения

$$x + 2y + 3 = 0 \text{ и } 2x + 4y + 6 = 0$$

задают одну и ту же прямую. В самом деле, второе уравнение получается из первого умножением всех его коэффициентов на 2. Значит, эти уравнения эквивалентны. Так же легко понять, что любое уравнение вида $kx + 2ky + 3k = 0$ при $k \neq 0$ будет задавать ту же самую прямую.

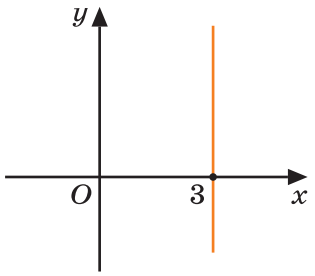


Рис. 7

Задайте прямую, изображённую на рисунке 7, через общее уравнение прямой. Объясните геометрический смысл равенства нулю одного из коэффициентов a, b и c в общем уравнении прямой.

Для нахождения общего вида прямой, проходящей через точки $A(2; 5)$ и $B(9; 2)$, надо решить систему

$$\begin{cases} 2a + 5b + c = 0, \\ 9a + 2b + c = 0. \end{cases}$$

Как объяснить то, что переменных в этой системе больше, чем уравнений?

УПРАЖНЕНИЯ

8. Приведите уравнение прямой к общему виду:
а) $y = 7$; б) $y = 3x$; в) $y = 5x + 7$; г) $8 - 2x = 4y$.

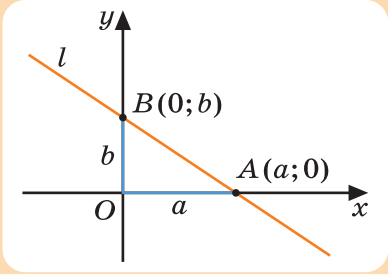
9. Постройте прямую на координатной плоскости по её уравнению в общем виде:
а) $2y + 3 = 0$; б) $y + 2x - 1 = 0$;
в) $4y - 6x - 5 = 0$; г) $121x - 77y + 44 = 0$.

10. Верно ли, что уравнения $\frac{y}{2} = \frac{x}{3} - 1{,}5$ и $3y - 2x + 9 = 0$ задают одну и ту же прямую?

Если известны координаты точек пересечения прямой с осями координат, то легко найти её общее уравнение, которое называют *уравнением в отрезках*.

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ОТРЕЗКАХ

Если прямая l пересекает оси Ox и Oy координат в точках $A(a; 0)$ и $B(0; b)$, отличных от точки O, то она задаётся уравнением вида $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.



Своё название это уравнение получило, потому что при $a, b > 0$ числа a и b можно считать длинами отрезков, которые отсекает прямая l от координатных лучей Ox и Oy.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

УПРАЖНЕНИЯ

11. Выведите уравнение в отрезках из общего уравнения прямой.

12. Пользуясь уравнением прямой в отрезках, напишите уравнения прямых l_1, l_2 и l_3, изображённых на рисунке 8.

13. Постройте прямую l на координатной плоскости по уравнению прямой в отрезках:

а) $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 1$; б) $3y - 4x - 1 = 0$;

в) $2x + 5y - 4 = 0$.

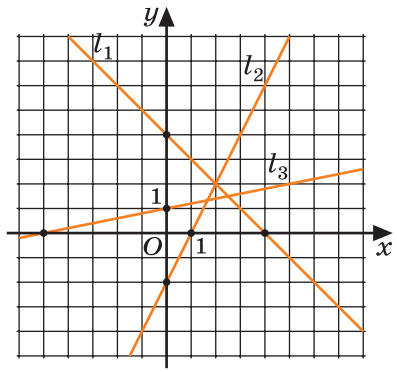


Рис. 8

Коэффициенты нормали к прямой

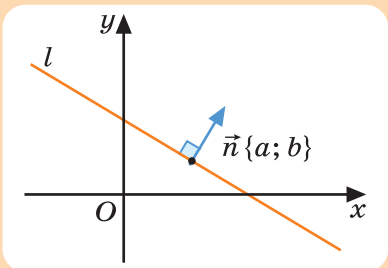
Направление прямой, заданной уравнением $y = kx + l$, определяет угловой коэффициент k. В общем же случае направление прямой мы будем определять через вектор нормали к этой прямой.

Вектором нормали к прямой называется любой вектор, перпендикулярный этой прямой.

Оказывается, что если прямая l задана общим уравнением $ax + by + c = 0$, то координаты одного из векторов нормали к этой прямой равны a и b. Давайте запишем это как теорему.

ТЕОРЕМА

Вектор $\vec{n}\{a;b\}$ является вектором нормали к прямой l, заданной уравнением $ax + by + c = 0$.



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Возьмём две произвольные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ на прямой l (рис. 9). Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ будет иметь координаты $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Так как точки A и B лежат на прямой l, то имеют место равенства $ax_1 + by_1 + c = 0$, $ax_2 + by_2 + c = 0$.

Вычтем эти равенства одно из другого. Тогда мы получим $(ax_2 + by_2 + c) - (ax_1 + by_1 + c) = 0$.

Его можно переписать в виде

$$a \cdot (x_2 - x_1) + b \cdot (y_2 - y_1) = 0.$$

Теперь рассмотрим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ и $\vec{n}\{a; b\}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = a \cdot (x_2 - x_1) + b \cdot (y_2 - y_1) = 0.$$

Поскольку ни один из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{n}$ не является нулевым, а их скалярное произведение равно нулю, то это значит, что они перпендикулярны друг другу. Но тогда вектор $\vec{n}\{a; b\}$ перпендикулярен прямой l и является нормалью к этой прямой.

Что и требовалось доказать.

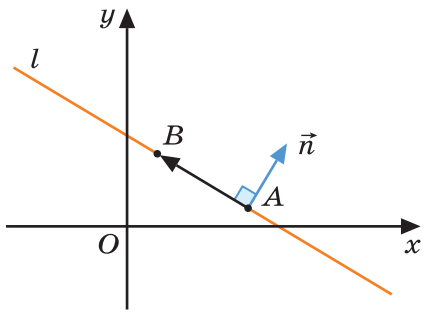


Рис. 9

Ту же прямую l можно задать общим уравнением $kax + kby + kc = 0$, где $k \neq 0$. В этом случае вектор нормали $\vec{n}_1$ будет иметь координаты $\{ka; kb\}$, то есть он будет равен $k \cdot \vec{n}$. Значит, векторы $\vec{n}$ и $\vec{n}_1$ параллельны и вектор вектор $\vec{n}_1$ тоже перпендикулярен прямой l.

УПРАЖНЕНИЯ

14. Найдите координаты вектора нормали к прямой, заданной уравнением:
а) $2x + y - 8 = 0$; б) $3y - x + 2 = 0$; в) $y = -2x$.

15. На рисунках 10, 11, 12 изображён вектор нормали к прямой l, отложенный от некоторой её точки. Напишите уравнение прямой l.

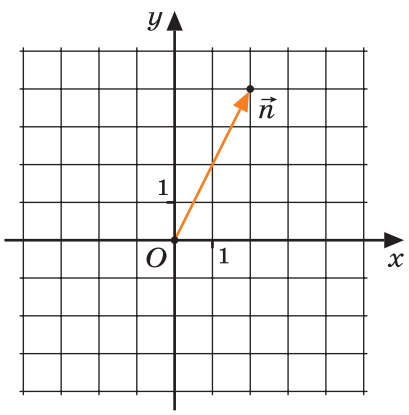


Рис. 10

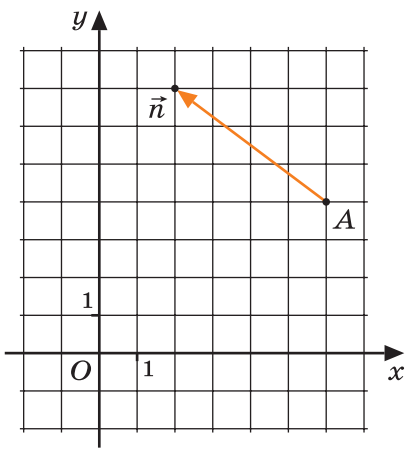


Рис. 11

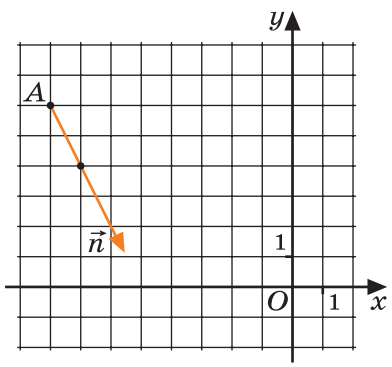


Рис. 12

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Параллельные прямые

Две прямые, заданные уравнениями $y = kx + l_1$ и $y = kx + l_2$, параллельны, поскольку имеют один и тот же угловой коэффициент k. Аналогично будут параллельными и две прямые, заданные общими уравнениями $ax + by + c_1 = 0$ и $ax + by + c_2 = 0$, поскольку они перпендикулярны одному вектору нормали $\vec{n}\{a; b\}$.

Для параллельности прямых $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$ достаточно проверить равенство $k_1 = k_2$. А проверка параллельности прямых, заданных общими уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, происходит чуть сложнее. Для этого нужно проверить, что векторы нормалей $\overrightarrow{n_1}\{a_1; b_1\}$ и $\overrightarrow{n_2}\{a_2; b_2\}$ к этим прямым коллинеарны. Координаты коллинеарных векторов должны быть пропорциональны, то есть должно выполняться равенство $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$. Из него легко получить условие параллельности двух прямых:

$$a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1.$$

Если это условие выполнено, то прямые параллельны, если нет — пересекаются.

Всегда ли можно проверять параллельность векторов нормали $\overrightarrow{n_1}\{a_1; b_1\}$ и $\overrightarrow{n_2}\{a_2; b_2\}$ через равенство $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$?

Уравнение прямой, которая проходит через точку $P(x_0; y_0)$ и параллельна прямой l, заданной уравнением

$$ax + by + c = 0,$$

всегда можно искать в виде $ax + by + c_0 = 0$. Нужное значение c_0 коэффициента c можно найти из уравнения $ax_0 + by_0 + c_0 = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

16. Параллельны ли прямые l_1 и l_2, заданные уравнениями:
а) $11x - 4y - 5 = 0$ и $11x - 4y + 3 = 0$;
б) $9 - 3x - 6y = 0$ и $2x + 4y - 11 = 0$;
в) $2y - 7x - 3 = 0$ и $14x - 3y + 5 = 0$?

17. Напишите уравнение прямой, параллельной прямой l, проходящей через точку P если:
а) $P(1; 2)$, l: $2x - 3y + 1 = 0$;
б) $P(-2; 5)$, l: $-x + 2y - 5 = 0$;
в) $P(-1; -4)$, l: $2x + 4y = 0$.

Перпендикулярные прямые

Как по уравнениям двух прямых определить, что они перпендикулярны друг другу? Если две прямые заданы уравнениями $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$, то установить их перпендикулярность можно по такому правилу: нужно проверить, что произведение угловых коэффициентов этих прямых равно -1, то есть $k_1k_2 = -1$ (рис. 13).

Понять, откуда берётся такое правило, сложнее, чем определить параллельность двух прямых по равенству

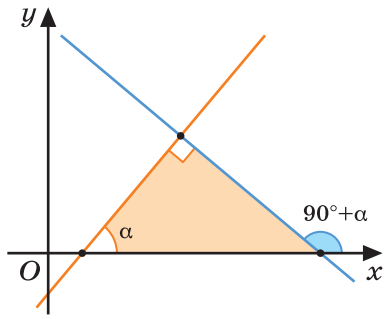


Рис. 13

Проверьте, что $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(90° + \alpha) = -1$, и получите условие $k_1 \cdot k_2 = -1$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

($k_1 = k_2$) их угловых коэффициентов. Сделать это можно, используя тригонометрию.

А для двух прямых, заданных уравнениями общего вида, сделать это намного проще. Ведь две прямые перпендикулярны между собой только тогда, когда перпендикулярны нормали к этим прямым. Пусть данные прямые заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Если векторы их нормалей $\vec{n_1}\{a; b\}$ и $\vec{n_2}\{-b; a\}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. Значит, выполняется равенство

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Это равенство будет условием перпендикулярности двух прямых.

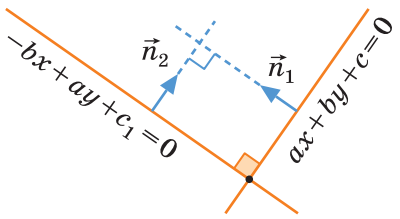


Рис. 14

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $P(x_0; y_0)$, перпендикулярно прямой $ax + by + c = 0$ можно искать в виде

$$bx - ay + c_1 = 0,$$

поскольку векторы нормалей $\vec{n_1}\{a; b\}$ и $\vec{n_2}\{b; -a\}$ к этим прямым перпендикулярны (рис. 14). *А коэффициент c_1 можно найти, если подставить координаты $(x_0; y_0)$ точки P в уравнение проходящей через неё прямой.*

УПРАЖНЕНИЯ

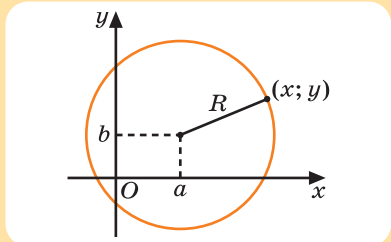
18. Перпендикулярны ли прямые l_1 и l_2, заданные уравнениями:
а) $3x - 2y - 1 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$;
б) $5x - y + 3 = 0$ и $-2x + 10y - 3 = 0$?

19. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку P, перпендикулярной прямой l, если:
а) $P(1; 1)$, l: $3x - y + 1 = 0$;
б) $P(2; -3)$, l: $-3x + 4y - 7 = 0$.

Уравнение окружности

Мы научились задавать прямую линию на плоскости уравнением. Теперь получим уравнение окружности. Напомним, что окружность — это геометрическое место точек на плоскости, удалённых от её центра $O(a; b)$ на заданное расстояние R. Поэтому для всех точек $P(x; y)$ этой окружности выполняется равенство $PO = R$, равносильное равенству $PO^2 = R^2$. Запишем это равенство в координатах как уравнение.

Уравнение окружности с центром в точке $(a; b)$ и радиусом R имеет вид: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Легко видеть, что окружность не является графиком какой-либо функции. По определению каждому значению переменной x числовая функция должна ставить в соответствие не более одного значения переменной y. А уравнение окружности при большинстве допустимых значений переменной x имеет не одно, а два решения относительно переменной y (рис. 15). Давайте выразим y из этого уравнения. Перенесём слагаемое с переменной x в его правую часть и извлечём корень из обеих частей уравнения:

$$|y - b| = \sqrt{R^2 - (x - a)^2}.$$

Тогда при $y \geqslant b$ мы получим уравнение

$$y = b + \sqrt{R^2 - (x - a)^2}.$$

Оно задаёт верхнюю полуокружность, все точки которой лежат выше центра окружности.

При $y \leqslant b$ мы получим уравнение

$$y = b - \sqrt{R^2 - (x - a)^2}.$$

Оно задаёт нижнюю полуокружность, все точки которой лежат ниже центра окружности. Отметим, что обе полуокружности являются числовыми функциями.

Какую фигуру на плоскости задаёт неравенство $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R$?

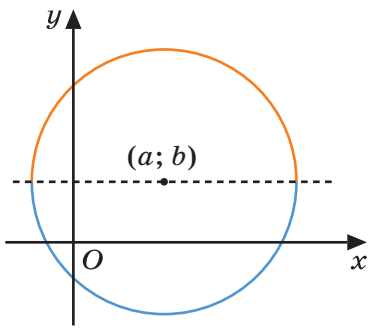


Рис. 15

УПРАЖНЕНИЯ

20. Задайте уравнением каждую из окружностей на рисунке 16 (а, б), если сторона клетки равна 1.

21. На координатной плоскости изобразите фигуру, заданную уравнением или неравенством:
а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$;
в) $(x + 4)^2 + y^2 < 25$; г) $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 \leqslant 10$;
д) $y = \sqrt{16 - x^2}$; е) $y + \sqrt{3 - (x + 1)^2} = 1$.

22. Для фигур, изображённых на рисунках 17, 18, 19, 20, напишите уравнение или неравенство, которое их задаёт.

23. Найдите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением:
а) $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 4$; б) $x^2 - 2x + y^2 + 10y = 10$;
в) $x^2 + 8x + y^2 + 2y = 9$; г) $(2x - 2)^2 + (2y + 4)^2 = 8$;
д) $3x^2 + 2x + 3y^2 - 9y - 5 = 0$.

24. Окружность, описанная около треугольника ABC с вершинами в точках $A(2; 1)$, $B(3; 8)$, $C(10; 1)$, имеет центр в точке $O(6; 4)$. Найдите уравнение этой окружности.

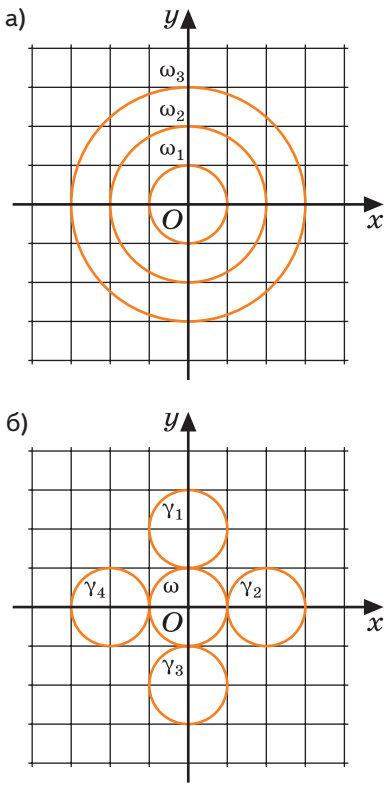


Рис. 16

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

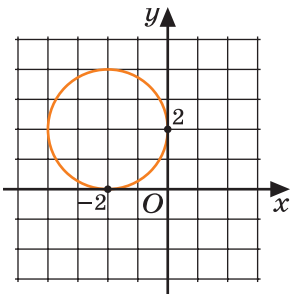


Рис. 17

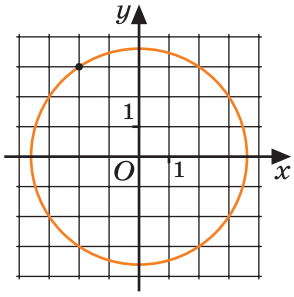


Рис. 18

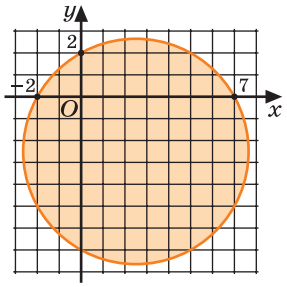


Рис. 19

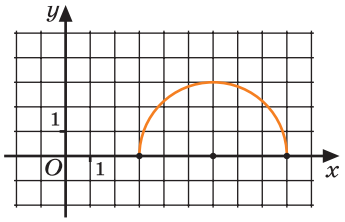


Рис. 20

25. Найдите уравнения окружностей, описанных около многоугольников, изображённых на рисунках 21, 22.

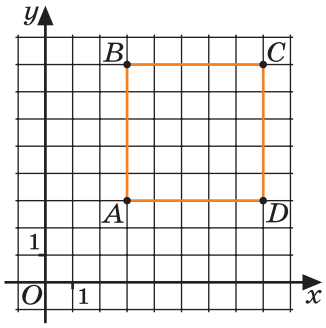


Рис. 21

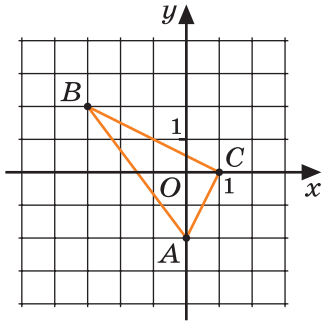


Рис. 22

Точки пересечения

Часто в задачах рассматривается не одна, а несколько фигур. При этом возникает вопрос взаимного расположения этих фигур, и в частности вопрос об их общих точках или точках пересечения.

Из курса алгебры вы знаете, что для нахождения общих точек двух фигур, заданных уравнениями (или неравенствами), надо решить систему этих уравнений (или неравенств). Ведь если точка $P(x; y)$ принадлежит сразу двум фигурам, то её координаты должны удовлетворять уравнениям (или неравенствам) каждой из этих фигур.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1. ★☆☆ Найдите координаты точки пересечения прямых l_1: $2x - 3y - 2 = 0$ и l_2: $x - y - 3 = 0$.

РЕШЕНИЕ

Для нахождения координаты точки пересечения необходимо решить систему уравнений, задающих прямые l_1 и l_2:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0, \\ x - y - 3 = 0. \end{cases}$$

Путём алгебраических преобразований найдём, что система имеет единственное решение $x = 7$, $y = 4$. Значит, прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке с координатами (7; 4).

Ответ: (7; 4).

Если система из двух линейных уравнений общего вида имеет единственное решение, то эти прямые имеют единственную точку пересечения. А как геометрически объяснить случай, когда система не имеет решений? Или случай, когда решений бесконечно много?

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Если нужно найти точку пересечения окружности и прямой, то одно из уравнений системы будет квадратным. А значит, система может иметь 0, 1 или 2 решения. На самом деле в этом нет ничего удивительного: прямая на плоскости тоже может иметь с окружностью 0, 1 или 2 точки пересечения. В зависимости от этого и количество решений соответствующей системы будет таким же. Получается, что по количеству корней системы уравнений можно понять взаимное расположение прямой и окружности.

УПРАЖНЕНИЯ

26. Найдите координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2, заданных уравнениями:
а) l_1: $3x - y + 1 = 0$, l_2: $x + y - 5 = 0$;
б) l_1: $2x - 3y + 2 = 0$, l_2: $5x - 7y + 1 = 0$.

27. Найдите координаты точки пересечения прямых AB и CD на рисунках 23, 24.

28. Определите взаимное расположение прямой l и окружности ω и найдите координаты точек их пересечения, если они есть:
а) l: $2x - y - 9 = 0$, ω: $(x - 7)^2 + y^2 = 25$;
б) l: $x + 3y - 5 = 0$, ω: $(x + 6)^2 + (y + 3)^2 = 40$;
в) l: $x + 5y + 12 = 0$, ω: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

29. Определите взаимное расположение окружностей ω и γ и найдите координаты точек их пересечения, если они есть:
а) ω: $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 20$, γ: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 50$;
б) ω: $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 16$, γ: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$;
в) ω: $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 13$, γ: $\left(x - \frac{17}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{13}{4}$.

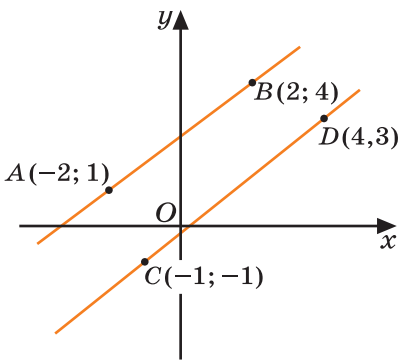


Рис. 23

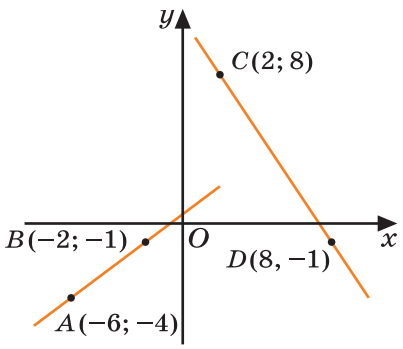


Рис. 24

Расстояние от точки до прямой

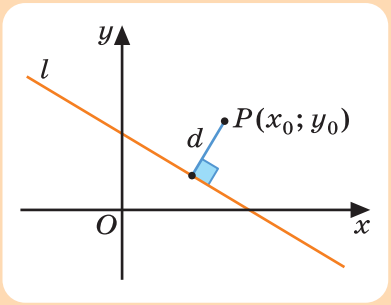
Общее уравнение прямой имеет ещё одно преимущество по сравнению с уравнением вида $y = kx + l$. Оказывается, с его помощью очень удобно находить расстояние от произвольной точки плоскости P до этой прямой, если известны координаты $(x_0; y_0)$ данной точки и коэффициенты уравнения самой прямой.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ФОРМУЛА РАССТОЯНИЯ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Расстояние d от точки $P(x_0; y_0)$ до прямой l, заданной уравнением $ax + by + c = 0$,

равно $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.



Эту формулу можно запомнить следующим образом: в числителе дроби стоит модуль значения, которое получается при подстановке координаты данной точки в общее уравнение прямой, а в знаменателе стоит **нормировочный коэффициент**, равный длине вектора нормали $\vec{n}\{a; b\}$ к прямой l.

Если в этой формуле убрать модуль в числителе, то получится формула **ориентированного расстояния** до прямой l (рис. 25). Для всех точек в одной полуплоскости от прямой l оно будет равно обычному расстоянию до этой прямой, а для точек в другой полуплоскости оно будет равно расстоянию до этой прямой, взятому со знаком минус. Такое расстояние используется в программировании, например, для определения того, с какой стороны от прямой лежит та или иная точка.

Проверьте с помощью формулы, что расстояние от точки, лежащей на прямой, до неё самой равно нулю.

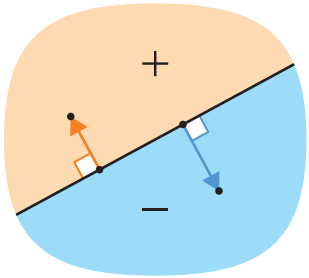


Рис. 25

УПРАЖНЕНИЯ

30. Найдите расстояние от точки A до прямой l, если они заданы следующим образом:
а) $A(-5; 7)$, l: $x + y + 6 = 0$;
б) $A(4; 10)$, l: $-5x + 3y + 58 = 0$;
в) $A(-8; -6)$, l: $2x - y + 20 = 0$.

31. Изобразите на координатной плоскости график уравнения $\dfrac{|x - 3y + 5|}{\sqrt{10}} = 7$.

32. Не решая систему уравнений, определите взаимное расположение прямой l и окружности ω заданных уравнениями:
а) l: $x + y - 4 = 0$, ω: $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 8$;
б) l: $-2x + y - 8 = 0$, ω: $(x - 10)^2 + (y + 2)^2 = 180$;
в) l: $7x + 17y + 175 = 0$, ω: $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 169$.

33. Найдите все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $|x - y| : \sqrt{2} = |y|$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

34. Составьте уравнение окружности, вписанной в треугольник ABC с координатами вершин $A(9;\ 2)$, $B(0;\ -10)$, $C(-7;\ 14)$, если известно, что её центр находится в точке $I(2;\ 1)$.

35. Какие из точек $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 5)$, $C(1;\ 1)$, $D(-2;\ -1)$, $E(3;\ 5)$, $F(19;\ 30)$ лежат в одной полуплоскости относительно прямой l: $36x - 23y + 7 = 0$, а какие — в другой?

Комбинирование аналитических и геометрических методов

При составлении уравнений различных прямых и кривых можно действовать прямолинейно: брать определение той или иной кривой и записывать условие, которым она задаётся в терминах уравнений. Но иногда гораздо эффективнее сначала воспользоваться некоторыми геометрическими соображениями, чтобы упростить составление соответствующего уравнения. Посмотрим, как это работает, на следующих двух примерах.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 2. ★☆☆ (*Уравнение серединного перпендикуляра*) Для двух данных точек A и B с координатами $A(x_a;\ y_a)$ и $B(x_b;\ y_b)$ найдите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB.

РЕШЕНИЕ

Воспользуемся тем, что серединный перпендикуляр к отрезку есть геометрическое место точек, равноудалённых от концов данного отрезка. Условие равенства расстояний от произвольной точки $P(x;\ y)$ до точек A и B равносильно равенству квадратов отрезков PA и PB (рис. 26). Пользуясь формулой квадрата расстояния между двумя точками, запишем следующее равенство

$$(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 = (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2.$$

Перенося в левую часть все слагаемые и сокращая равные слагаемые, получаем уравнение серединного перпендикуляра:

$$2(x_b - x_a)x + 2(y_b - y_a)y + x_a^2 + y_a^2 - x_b^2 - y_b^2 = 0.$$

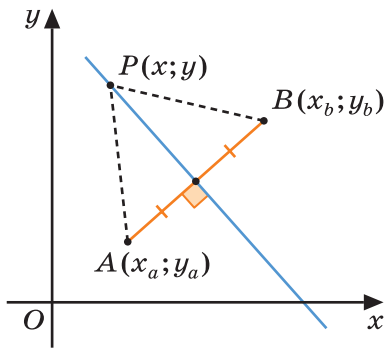


Рис. 26

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ПРИМЕР 3. ★★☆ (*Уравнение биссектрис углов между двумя прямыми*) Прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями: l_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, l_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Найдите уравнения прямых m_1 и m_2, содержащих биссектрисы углов, образованных прямыми l_1 и l_2.

РЕШЕНИЕ

Вспомним, что все точки, равноудалённые от сторон угла, лежат на его биссектрисе. Тогда для любой точки $P(x; y)$, лежащей на биссектрисе угла между данными прямыми, расстояния от неё до прямых l_1 и l_2 будут равны (рис. 27). Запишем это условие в координатах, пользуясь формулой расстояния от точки до прямой:

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

В обеих частях данного равенства стоят модули. Раскрывая эти модули, мы получим два уравнения, которые отличаются друг от друга знаком одной из частей:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Эти два уравнения и задают прямые m_1 и m_2.

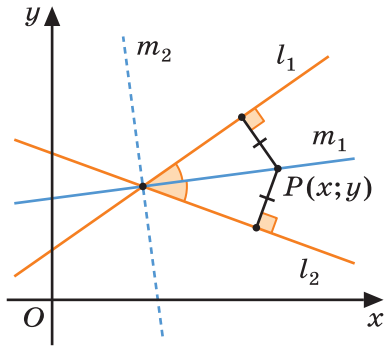


Рис. 27

УПРАЖНЕНИЯ

36. Найдите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB, если его концы имеют координаты: а) $A(4; 6)$, $B(6; -2)$; б) $A(1; -2)$, $B(-4; 6)$; в) $A(-11; -6)$, $B(8; 3)$.

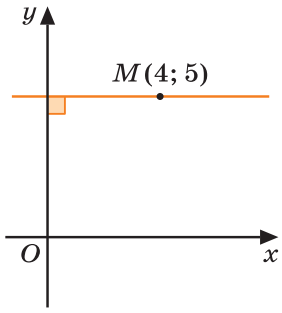
37. Найдите уравнения биссектрис углов, образованных прямыми l_1 и l_2, если:
а) l_1: $x + y - 2 = 0$, l_2: $2x - 2y + 10 = 0$;
б) l_1: $3x + 4y - 5 = 0$, l_2: $y = 0$.

ВОПРОСЫ

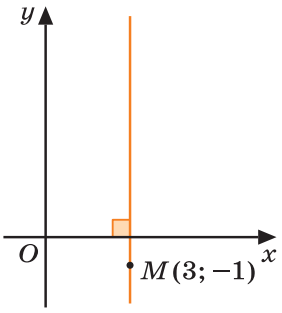
1. Что такое угловой коэффициент прямой? Как он связан с углом её наклона?
2. Что такое общее уравнение прямой? Каков геометрический смысл коэффициентов a и b в этом уравнении?
3. Что такое уравнение в отрезках?
4. При каком условии на коэффициенты уравнений две прямые будут параллельны, перпендикулярны?
5. Какое уравнение имеет окружность с центром в точке $O(a; b)$ и радиусом R?
6. Как выглядит уравнение полуокружности радиуса 1 с центром в начале координат, лежащей выше оси Ox?
7. По какой формуле вычисляют расстояние от точки до прямой?
8. Какое условие задаёт круг на координатной плоскости?

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

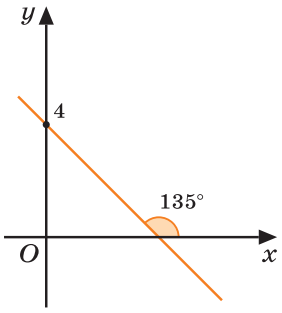
а)



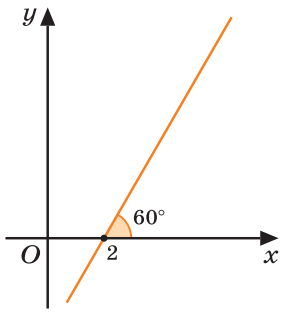
б)



в)



г)



задача 1

ЗАДАЧИ

1. ★☆☆ Напишите уравнения прямых, изображённых на рисунках. (рис.)

2. ★☆☆ Найдите расстояние от начала координат до прямой, заданной уравнением $12x - 5y - 26 = 0$.

3. ★☆☆ Прямая, заданная уравнением $y + 2x - 1 = 0$, пересекает ось Oy в точке A. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно к заданной прямой.

4. ★☆☆ Напишите уравнение прямой, содержащей медиану AM треугольника ABC с вершинами в точках $A(-4; 1)$, $B(3; 4)$, $C(-1; -6)$.

5. ★☆☆ На координатной плоскости изобразите множество всех точек $M(x; y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $x + y \geqslant x^2 + y^2$.

6. ★☆☆ Найдите расстояние между параллельными прямыми, заданными уравнениями: l_1: $3x - 4y - 1 = 0$, l_2: $3x - 4y + 2 = 0$.

7. ★☆☆ На координатной плоскости расположен египетский треугольник ABC с вершинами в точках $A(3; 0)$, $B(0; 4)$, $C(0; 0)$. Напишите уравнение прямой, содержащей: а) гипотенузу AB; б) медиану, проведённую из вершины A; в) биссектрису угла B.

8. ★★☆ Докажите, что данное уравнение $(3x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ не задаёт окружность на плоскости.

9. ★☆☆ Дрон, находящийся над базой, пролетел, не меняя высоты, от неё по прямой 30 м. Затем относительно своего направления он повернулся против часовой стрелки на 45° и пролетел в новом направлении $40\sqrt{2}$ м. Потом он повернулся против часовой стрелки ещё на 90° и пролетел в новом направлении ещё $70\sqrt{2}$ м. На какой угол ему надо повернуться относительно текущего положения и какое расстояние нужно пролететь, чтобы вернуться обратно на базу? (рис.)

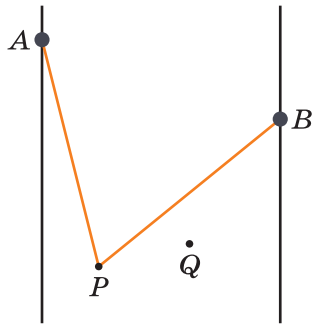
10. ★☆☆ Напишите уравнение окружности, описанной около треугольника ABC с вершинами в точках а) $A(-1; -5)$, $B(1; 1)$ и $C(13; -3)$; б) $A(2; 5)$, $B(-6; 1)$ и $C(-1; -4)$.

11. ★★☆ Для рисования на плоскости используется механизм, устроенный следующим образом. Два манипулятора равной длины передвигают головку для рисования, обозначенную через P. Вторые концы каждого из них, обозначенные через A и B, передвигаются по вертикальным направляющим. Известно, что сейчас координаты точек таковы: $A(0; 25)$, $B(21; 18)$, $P(5; 5)$. Найдите координаты точки Q, в которой окажется головка для рисования,

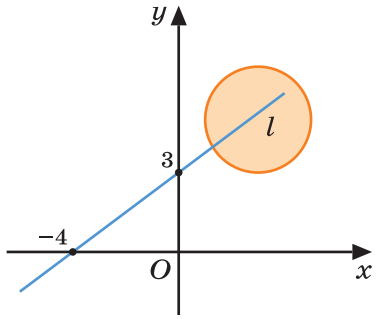
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 9



задача 11



задача 14

если левый манипулятор опустить на 2, а правый — поднять на 8. (рис.)

12. ★★☆ Квадрат и прямоугольник одинакового периметра имеют общий угол. Докажите, что точка пересечения диагоналей прямоугольника лежит на диагонали квадрата.

13. ★★☆ Напишите уравнения касательных к окружности, заданной уравнением $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 1$, если они проходят через начало координат.

14. ★★☆ Найдите уравнения прямых, параллельных прямой l, изображённой на рисунке, и касающихся окружности, заданной уравнением $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$. (рис.)

15. ★★☆ Найдите множество всех точек, расстояние от которых до оси абсцисс равно расстоянию до точки $F(0; 0{,}5)$. Какую известную кривую оно задаёт?

16. ★★☆ Найдите множество всех точек, расстояние от каждой из которых до начала координат в 2 раза больше расстояния от неё до точки $A(0; 3)$.

17. ★★☆ Найдите координаты центров окружностей радиуса 5, которые касаются оси y и прямой l, изображённой на рисунке. (рис.)

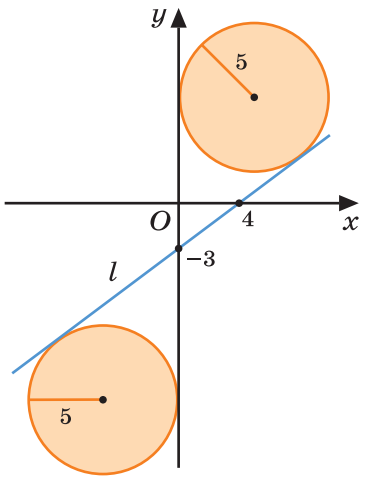
18. ★★★ Найдите уравнение окружности, вписанной в треугольник ABC с вершинами в точках $A(0; 7)$, $B(-9; -5)$ и $C(-16; 19)$.

19. ★★★ Биссектрисы внешних углов египетского треугольника пересекают продолжения его сторон в трёх точках. Докажите, что одна из них является серединой отрезка, соединяющего две другие.

20. ★★★ При заданных числах a, b, c определите, сколько решений для x в промежутке от 0 до 180° включительно может иметь уравнение:

$$a\cos x + b\sin x + c = 0.$$

При каком условии на a, b, c это уравнение будет иметь ровно одно решение?



задача 17

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

§10 Длина окружности и площадь круга

Длина кривой линии

Каждый знает, что расстояние между двумя точками на плоскости — это длина отрезка, который соединяет эти точки. Ведь отрезок — самый короткий путь между ними. Однако обстоятельства часто вынуждают человека идти по «кривому» пути: дороги обходят горы и препятствия, реки имеют извилистые русла, да и берега морей или озёр никогда не бывает прямыми. Вот почему в известной песне поют: «Нормальные герои всегда идут в обход!». Ещё с древних времён люди хотели знать длину пройденного ими пути и придумывали для этого разные приспособления. В трудах римского писателя Плиния Старшего указаны очень точные расстояния, которые проходило войско Александра Македонского во время своих завоеваний. Как их определяли? Выдающиеся инженеры всех времён: Архимед, Герон, а после них Леонардо да Винчи изобретали одометры* — так называли тележки со специальными механизмами, которые считали длину пути по количеству оборотов их колёс (рис. 1). Сегодня для того чтобы посмотреть на одометр, не нужно идти в музей — он есть в любом автомобиле. А чтобы найти протяжённость маршрута на топографической карте, используют курвиметр** — аналогичный прибор со стрелкой и маленьким колёсиком.

Впрочем, длину дороги на карте с хорошей точностью можно найти и с помощью обычной нитки или циркуля. Для этого ножки циркуля по очереди ставят на линию дороги и «шагают» им по карте от начала пути до конечной точки. Потом складывают длины всех шагов и умножают на масштаб карты. Здесь действует простое правило: чем

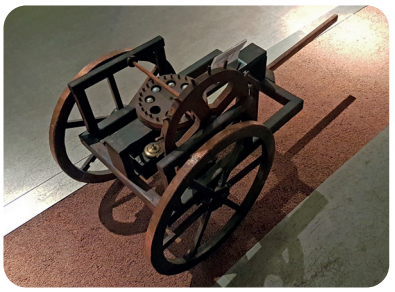


Рис. 1
С помощью таких тележек считали длину пути по количеству оборотов их колёс



Современный одометр



Курвиметр

* На древнегреческом языке слово *ὁδός* ([odos]) значит «дорога». Поэтому одометр — это измеритель дороги.

** Слово *curvus* на латыни значит «изогнутый». То есть курвиметр измеряет длину кривых линий.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

более извилист участок пути, тем меньше должен быть шаг циркуля. На практике мы поступаем так же: измеряем свой путь шагами, а перегоны железной дороги промежутками между столбами.

Как же в классической геометрии определяют длину кривой линии? Поскольку расстояние между точками — это длина отрезка, то и длину кривой определяют с помощью отрезков. Поэтому сделаем так же: впишем в кривую простую ломаную так, чтобы её начало и конец совпадали с концами данной кривой, а все вершины лежали на ней (рис. 2, а). Тогда в первом приближении длину кривой можно считать равной длине вписанной в неё простой ломаной. Конечно, любая такая ломаная будет короче самой кривой (подумайте почему). Но если увеличивать число её звеньев и одновременно уменьшать длину каждого звена, то в пределе вписанная в кривую простая ломаная почти не будет отличаться от самой кривой, а её длина начнёт приближаться к некоторому числу (рис. 2, б, в). Это предельное число и берут за длину кривой линии. Сам же процесс нахождения длины кривой называют её спрямлением. Давайте запишем это как определение длины кривой линии.

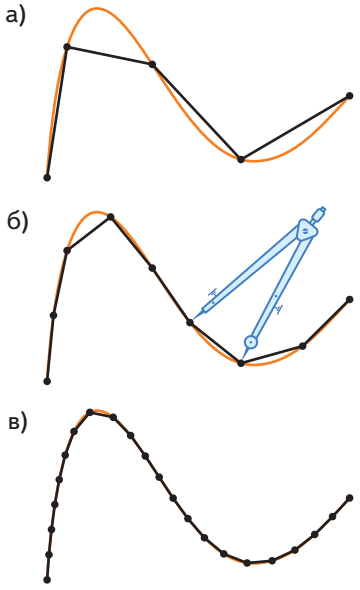
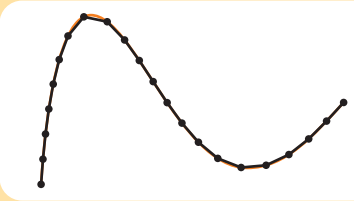


Рис. 2
Спрямление кривой

Длиной кривой называют число, к которому приближается длина вписанной в неё простой ломаной, если концы этой ломаной совпадают с концами кривой, а длина каждого её звена стремится к нулю.



Как найти длину окружности?

Наверное, самая простая кривая линия — это окружность. И одновременно она одна из самых совершенных линий на плоскости. С незапамятных времён человек чертил окружности верёвкой или циркулем на земле, на бумаге или на камне. И конечно, ему важно было знать, чему равна длина этой замкнутой кривой. На практике её длину можно найти с помощью всё той же верёвки — достаточно положить верёвку вдоль окружности, а потом распрямить. Однако такой способ не будет очень точным, а главное — он плохо применим для больших окружностей. Какой верёвкой, например, вы измерите длину орбиты космического спутника? Поэтому мы вычислим длину окружности геометрически: впишем в неё простую замкнутую ломаную и сделаем так, чтобы все её звенья были очень малы. Тогда эта ломаная почти не будет отличаться

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

от окружности, а её длина будет лишь немного меньше длины самой кривой.

Проще всего вписать в окружность ломаную, все звенья которой имеют одинаковую длину. Давайте впишем в окружность с центром O простую замкнутую ломаную $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_1$, все звенья которой равны a (рис. 3). Очевидно, эта ломаная будет равносторонним n-угольником. Проведём из центра O радиусы во все его вершины — они разобьют многоугольник на n равнобедренных треугольников OA_1A_2, OA_2A_3, ... OA_nA_1. Все эти треугольники равны по трём сторонам, поэтому будут равны их углы с вершиной в центре окружности. В сумме эти углы составляют 360°, поэтому каждый из них будет равен $360° : n$. Это позволит нам выразить длину a звена ломаной через радиус R окружности.

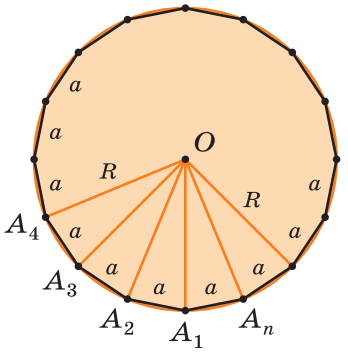


Рис. 3

Рассмотрим равнобедренный треугольник OA_1A_2: его боковые стороны равны радиусу R окружности, основание — звену a нашей ломаной, а угол A_1OA_2 равен $360° : n$. Проведём в этом треугольнике высоту OH — по свойству она будет его биссектрисой и медианой (рис. 4). Тогда отрезки A_1H и A_2H будут равны половине звена ломаной, а угол A_1OH составит половину от угла OA_1A_2, то есть будет равен $180° : n$. Из прямоугольного треугольника OHA_1 найдём, что $\frac{a}{2} = R \cdot \sin\frac{180°}{n}$. Откуда $a = 2R \cdot \sin\frac{180°}{n}$.

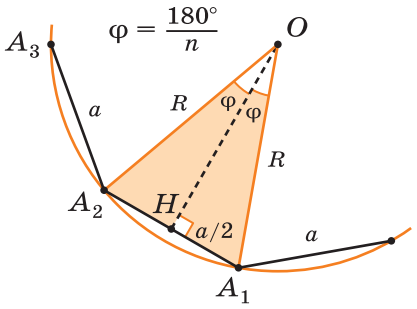


Рис. 4

Теперь легко найти периметр всего n-угольника:

$$P_n = 2R \cdot n \cdot \sin\frac{180°}{n}.$$

Исследуем эту формулу при разных n. При $n = 6$ мы получим периметр уже известного нам правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R (рис. 5):

$$P_6 = 2R \cdot 6 \cdot \sin\frac{180°}{6} = 12R \cdot \sin 30° = 6R.$$

При $n = 18$ получим $P_{18} = 2R \cdot 18 \cdot \sin\frac{180°}{18} = 36 \cdot R \cdot \sin 10°$.

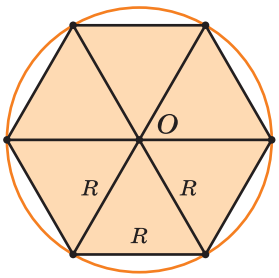


Рис. 5
Периметр правильного шестиугольника равен $6R$

Из тригонометрической таблицы на стр. 17 найдём, что $\sin 10° \approx 0{,}173$. Тогда $P_{18} = 2R \cdot 18 \cdot 0{,}173 \approx 6{,}228 \cdot R$.

Возьмём n значительно больше. Пусть $n = 180$. Тогда

$$P_{180} = 2R \cdot 180 \cdot \sin\frac{180°}{180} = 360 \cdot R \cdot \sin 1°.$$

По тригонометрической таблице учебника можно найти, что $\sin 1° \approx 0{,}017$. Правда, здесь нам потребуется уже бóльшая точность. Не зря же астрономы прошлых веков различными способами старались вычислить синус одного градуса с пятью или шестью знаками после запятой. Из их таблиц или на современном калькуляторе можно найти, что $\sin 1° \approx 0{,}017452$. Если мы подставим это значение в нашу формулу, то получим, что

$P_{180} = 360 \cdot R \cdot \sin 1° \approx 360 \cdot 0{,}017452 \cdot R = 6{,}282 \cdot R$.

Чему же равна длина окружности радиуса R? Ясно, что она должна быть чуть больше числа $6{,}282 \cdot R$. Можно

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

строго доказать*, что длина ломаной с любым числом звеньев, которая вписана в окружность радиуса R, должна быть меньше $6{,}284 \cdot R$. Таким образом, мы будем считать, что длина окружности радиуса R равна $6{,}283 \cdot R$ с точностью до одной тысячной её радиуса.

Число π

Что такое число π? Ответить на этот вопрос можно так: π — главное число окружности. Но почему его обозначили такой буквой? Здесь всё просто: с этой буквы начинается греческое слово π ε ρ ι φ ε ρ ε ι α, которое и значит «окружность». Это слово читается как периферия, оно существует в современном русском языке и обозначает то же самое, что и окраина, то есть область, сильно удалённую от центра. Обычно так и говорят: «уехать на периферию», «периферия сознания» или даже «периферия компьютера». А для древних греков это слово просто означало окружность. Вот первую букву π от этого греческого слова и взял Леонард Эйлер в XVIII веке для обозначения главного числа окружности.



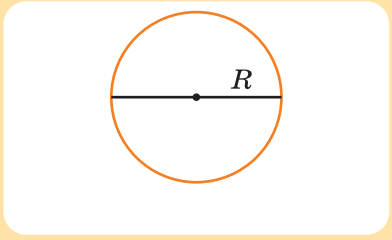
Леонард Эйлер

Что же это за число? Число π показывает, во сколько раз длина окружности больше её диаметра. То есть окружность с диаметром D должна иметь длину $\pi \cdot D$. А поскольку диаметр окружности в два раза больше её радиуса, то её длина так же равна $2\pi R$. Вписывая ломаные в окружность радиуса R, мы выяснили, что её длина L равна $6{,}283 \cdot R$ с точностью до одной тысячной радиуса. Поэтому $L = 2\pi R \approx 6{,}283 \cdot R$. Отсюда можно найти, что число π примерно равно 3,1415. Давайте запишем это как определение числа π.

Число π равно отношению длины L любой окружности к её диаметру D. Число π ≈ 3,1415.

Из определения следует важная формула, выражающая длину окружности через её радиус: $L = \pi \cdot D = 2\pi R$.

$$L = 2\pi R$$

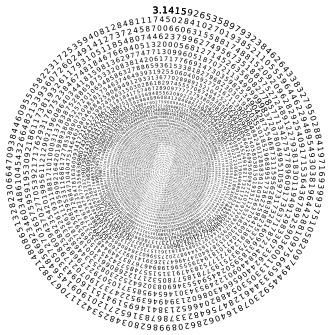


* Наметим идею такого доказательства. Опишем вокруг данной окружности 180-угольник, все стороны которого имеют длину b. Легко доказать, что окружность будет касаться его сторон в серединах, откуда получить, что $b = 2R \cdot \operatorname{tg} 1^\circ \approx 2R \cdot 0{,}017455$. Периметр такого 180-угольника будет равен $180 \cdot 2R \cdot 0{,}017455 \approx 6{,}2838 \cdot R$. Этот многоугольник будет содержать окружность внутри себя, а значит, и все вписанные в неё многоугольники. А поскольку все эти многоугольники выпуклые, то их периметры всегда будут меньше $6{,}2838 \cdot R$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Мы нашли число π с точностью до одной тысячной. Но история его вычисления продолжалась тысячи лет. В Древнем Вавилоне его считали равным $\frac{25}{8} = 3{,}125$. В Древнем Египте полагали, что $\pi = \frac{256}{81} \approx 3{,}16$. А в Древней Индии за число π принимали $\sqrt{10}$. Великий Архимед вписал в окружность правильный 96-угольник и получил, что число $\pi \approx 3\frac{1}{7}$. В настоящее время π вычислено с огромным числом верных знаков с помощью числовых рядов: $\pi \approx 3{,}14159265358979323846264338327950288...$

Доказано, что число π иррациональное, то есть оно не может быть записано как отношение двух целых чисел и в десятичной записи его цифр после запятой никогда не будет периода. А для запоминания первых цифр числа π даже придумывают стихи.



Надо только постараться
И запомнить всё как есть:
Три, четырнадцать, пятнадцать,
Девяносто два и шесть.

Земля и апельсин

Все окружности — это подобные фигуры, поэтому и отношение длины каждой из них к своему диаметру одинаково. По сути это означает, что число π для них одно и то же. С одной стороны, это очевидно, а с другой... давайте разберём один парадокс, придуманный в прошлом веке замечательным писателем и популяризатором науки Яковом Перельманом.

Представим себе земной шар и обыкновенный апельсин. Мысленно плотно обтянем их железными обручами по экваторам. Ясно, что обруч апельсина будет маленьким, а обруч Земли огромным. Теперь разрежем эти обручи, добавим к каждому из них по одному метру длины и снова замкнём их (рис. 6, 7). Наши обручи тогда уже не будут плотно прилегать к поверхностям апельсина и земного шара — у каждого из них появится свой зазор. Понятно, что расстояние, на которое обруч отступит от поверхности апельсина, будет довольно большим: ведь целый метр по сравнению с апельсином — это много. И наоборот: тот же метр по сравнению с окружностью Земли — это совсем мало, его и заметить будет нельзя. Но тогда и зазор, на который железный обруч отступит от поверхности земного шара, будет практически незаметен. Поэтому возникает такой вопрос: этот зазор будет больше или меньше одного миллиметра? Не знаете? Тогда зададим ещё один совсем уж «глупый» вопрос: пролезет ли под этим обручем обыкновенная мышка? А для справки напомним, что длина экватора земного шара равна 40 000 км.

Наверняка у вас уже сложилось своё мнение по поводу мышки, апельсина и земного шара. Не будем пока

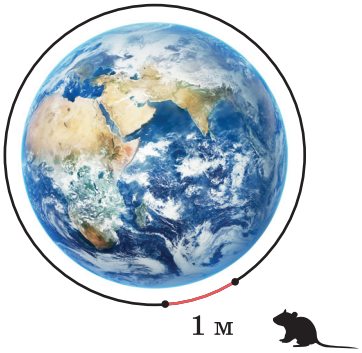


Рис. 6

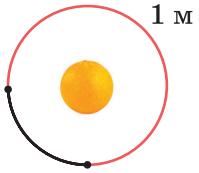
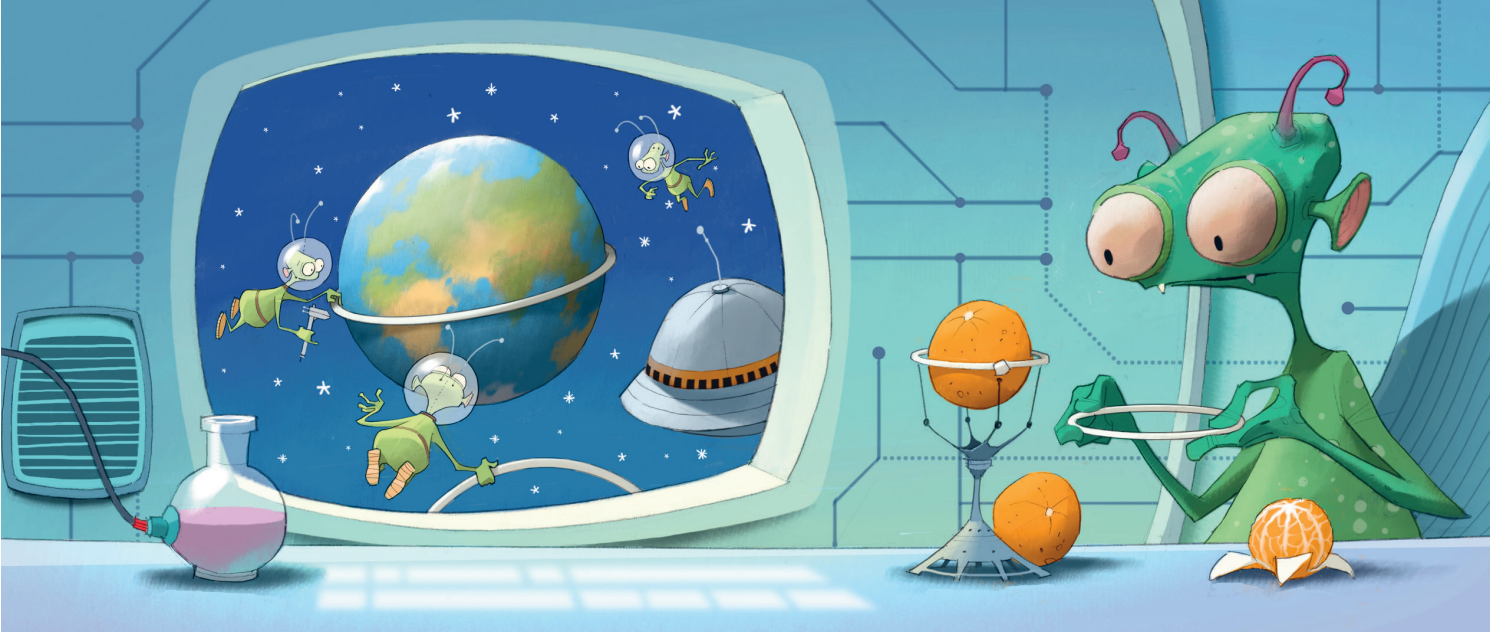


Рис. 7

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



отвечать на заданные вопросы, а просто посчитаем. Пусть радиус обруча равен R. Тогда длину L этого обруча можно найти по формуле: $L = 2\pi R$. Если мы увеличим длину обруча на 1 м, то его радиус увеличится на величину зазора h (рис. 8). Тогда для увеличенного обруча можно записать уравнение: $L + 1 = 2\pi(R + h) = 2\pi R + 2\pi h$.

Подставим в него выражение для длины первого обруча: $L = 2\pi R$. Тогда $2\pi R + 1 = 2\pi R + 2\pi h$.

Откуда $1 = 2\pi h$. Теперь найдём величину зазора:

$$h = \frac{1}{2\pi} \approx \frac{1\text{ м}}{2 \cdot 3{,}14} = \frac{100\text{ см}}{6{,}28} \approx 15{,}9\text{ см}.$$

Таким образом, зазор h, на который обруч отступит от поверхности любой окружности, будет около 16 см. Но самое удивительное состоит в том, что он будет одинаковым для апельсина и земного шара! Конечно, в такой зазор под обручем пролезет не только мышка, но и любая кошка!

Этот удивительный парадокс следует из того, что длина любой окружности выражается через её радиус по одной и той же формуле. А можно было бы сказать и так: он наглядно показывает, что число π постоянно для всех окружностей.

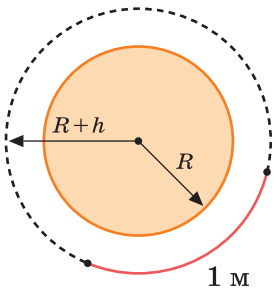


Рис. 8

УПРАЖНЕНИЯ

1. С точностью до 1 мм найдите длины окружностей, показанных на клетчатой бумаге, если сторона одной клетки равна 1 см (рис. 9).

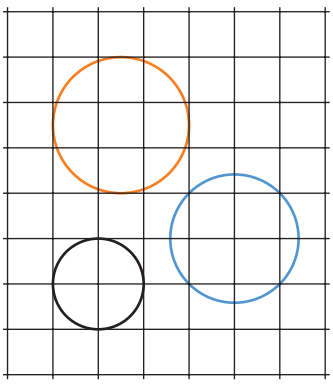


Рис. 9

2. Если колесо без проскальзывания катится по прямой дороге и делает ровно один оборот вокруг оси, то от-

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

носительно дороги оно перемещается на длину своей окружности. Найдите радиус колеса телеги, если она проехала 157 м, а каждое её колесо сделало ровно 100 оборотов (рис. 10).

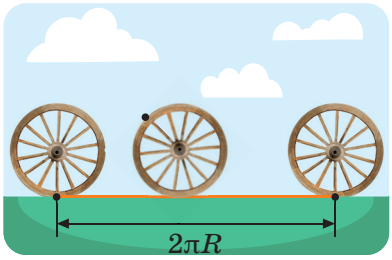


Рис. 10

Длина дуги окружности

Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$. А чему может быть равна длина её дуги? В частных случаях это очевидно. Например, диаметр делит окружность на две равные части — полуокружности. Значит, их длины одинаковы и составляют половину от длины всей окружности, то есть πR (рис. 11). А если всю окружность, как циферблат часов, разделить на 12 равных частей, то длина каждой дуги между делениями может быть вычислена как $2\pi R : 12 = \pi R : 6$ (рис. 12).

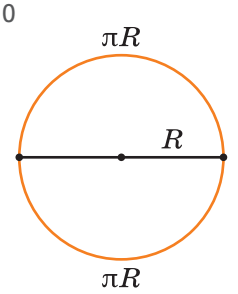


Рис. 11

А как быть в общем случае? Из приведённых примеров видно, что длина дуги окружности должна зависеть от её градусной меры — величины угла, под которым она видна из центра окружности. Очевидно, что с увеличением этого угла увеличивается и длина такой дуги. Мы докажем, что эта зависимость линейная, то есть длина дуги пропорциональна её градусной мере. А поскольку вся окружность видна из её центра под углом 360°, то справедлива следующая теорема.

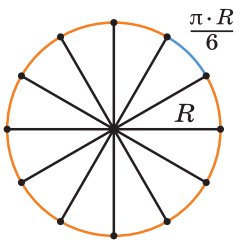
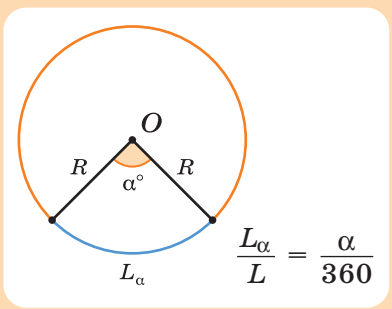


Рис. 12

ТЕОРЕМА

Длина дуги окружности относится к длине всей окружности как её градусная мера к полному углу 360°.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Мы докажем теорему для случая, когда градусная мера α дуги окружности относится к полному углу 360° рационально, то есть как два целых числа*. Пусть $\alpha : 360 = k : n$, где k, n — натуральные числа.

* Общий случай можно свести к этому, поскольку любое действительное число сколь угодно точно можно приблизить натуральной дробью.

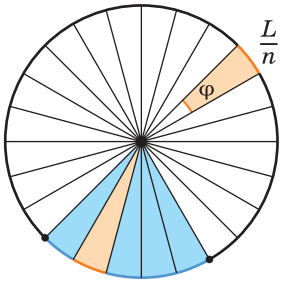
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Разобьём весь круг на n равных секторов с углами φ. Они разделят всю окружность длины L на n равных частей длины $L : n$ (рис. 13).

Очевидно, что $n \cdot \varphi = 360°$. По условию $\alpha : 360 = k : n$, поэтому $\alpha = k \cdot \varphi$. Значит, центральный угол α данной дуги вместит ровно k таких секторов. Следовательно, сама дуга состоит из k частей с длиной $\frac{L}{n}$.

Откуда получим, что длина дуги окружности, соответствующая углу α, равна $L_\alpha = k \cdot \frac{L}{n}$. Поэтому $\frac{L_\alpha}{L} = \frac{k}{n} = \frac{\alpha}{360}$.

Что и требовалось доказать.



$$L_\alpha = k \cdot \frac{L}{n}$$

Рис. 13

СЛЕДСТВИЕ

Из доказанной теоремы следует формула, выражающая длину дуги L_α окружности через её радиус R и градусную меру α этой дуги (рис. 14): $L_\alpha = 2\pi R \cdot \frac{\alpha}{360}$.

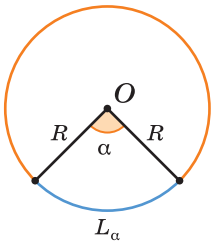


Рис. 14

УПРАЖНЕНИЯ

3. Докажите формулу для вычисления длины дуги окружности.

4. В квадрат со стороной 1 поместили дуги окружностей так, как это показано на рисунке 15. Найдите длину каждой из этих дуг, если их центры находятся на сторонах этого квадрата.

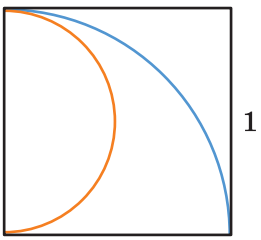


Рис. 15

5. На кафельной плитке изображён «месяц». С точностью до 1 см найдите периметр этого «месяца», если он состоит из дуг двух окружностей. Сторона одной плитки 10 см (рис. 16).

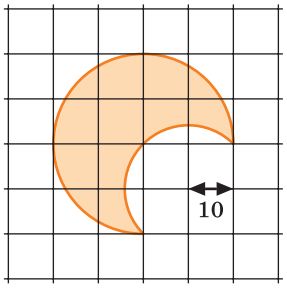


Рис. 16

Радианы

Вы уже знаете, как найти длину дуги окружности по её радиусу и центральному углу. Оказывается, что можно поступить ровно наоборот: центральный угол выразить через длину дуги, которую он высекает на окружности. Если дугу измерять в радиусах самой окружности, то по длине дуги однозначно можно определить угол, под которым она видна из центра. Определённая так величина угла называется его *радианной мерой*. Получается, что углы можно мерить не только в привычных уже нам градусах, но и в радианах.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

А что такое радианы? Давайте «согнём» радиус окружности и превратим его в дугу той же самой окружности. Тогда из её центра такой «согнутый в дугу» радиус будет виден под некоторым углом. Именно этот угол и называют одним радианом (рис. 17). В каком-то смысле радианная мера угла даже более универсальна, чем привычная нам градусная мера. Как бы, например, вы объяснили инопланетянам, что углы на Земле нужно измерять в 180 частях развёрнутого угла? А объяснить, что такое один радиан, можно просто на рисунке. Арабские астрономы ещё в XIV веке откладывали на окружности части её радиуса и мерили так центральные углы. Но само слово «радиан» появилось лишь во второй половине XIX века, и образовали его от слова «радиус». А теперь давайте запишем определение одного радиана.

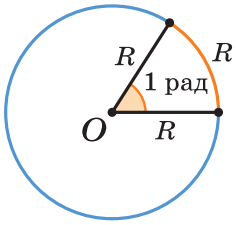
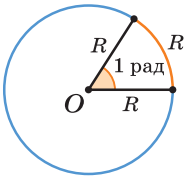


Рис. 17

Радианом называют центральный угол окружности, длина дуги которого равна её радиусу.

Угол с величиной α радиан записывают так: α рад.



На рисунках 18 а и б вы можете видеть углы величиной 2 и 3 радиана. Согласно данному определению этим углам должны соответствовать дуги окружности, равные $2R$ и $3R$. На последнем рисунке видно, что угол в 3 рад немного меньше развёрнутого угла. Это легко объяснить: развёрнутому углу должна соответствовать ровно половина окружности, длина которой равна πR. Значит, радианная мера половины окружности равна π, что немного больше 3 (рис. 19). Ну а мера целой окружности в радианах должна составлять 2π. Это позволяет составить таблицу пересчёта углов из градусов в радианы.

Сделать это вы можете в качестве упражнения.

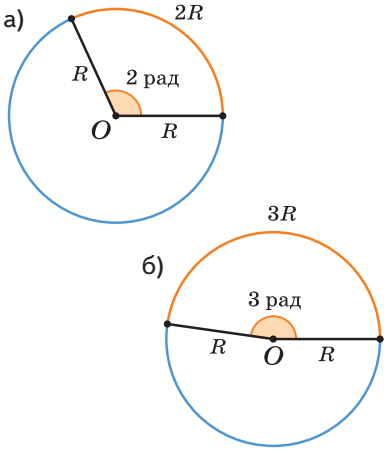


Рис. 18

УПРАЖНЕНИЕ

6. Заполните пустые места в таблице пересчёта углов из градусов в радианы.

Градусы	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Радианы	$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$			π

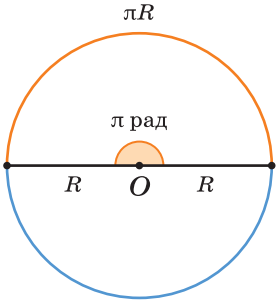


Рис. 19

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Теперь поставим обратную задачу: выясним, сколько градусов составляют угол в 1 рад. Обозначим градусную меру этого угла за α. Мы знаем, что углу 180° соответствует π радиан. Радианная мера угла, как и дуга окружности, пропорциональна её градусной мере, поэтому должна выполняться пропорция $\frac{1}{\pi} = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$. Откуда $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ$.

Значит, один радиан содержит чуть больше 57 градусов. А для того чтобы привыкнуть переводить радианы обратно в градусы, сделайте следующее упражнение.

Какова должна быть величина острого угла, чтобы и в градусах, и в радианах этот угол имел один и тот же синус?

УПРАЖНЕНИЕ

7. Переведите углы в таблице из радианов в градусы.

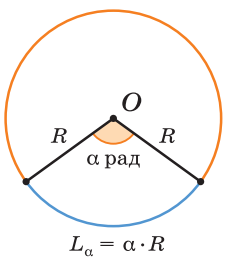
Радианы	2π	$1{,}5\pi$	$1{,}25\pi$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	3,1415	1,57
Градусы	360°						

Почему углы решили измерять в радианах? Главная причина состоит в том, что многие формулы в радианах записывать короче и понятнее. Например, формулу для вычисления длины дуги окружности. Посмотрим, как она будет выглядеть в радианах. Пусть радиус окружности равен R, а её дуга видна из центра под углом α рад. Длина дуги L_α должна относиться к длине всей окружности так же, как её угол α к полному углу, под которым из центра видна вся окружность. Поскольку длина окружности равна $2\pi R$, а полный угол в радианах равен 2π, то можно записать такую пропорцию $\frac{L_\alpha}{2\pi R} = \frac{\alpha_{\text{рад}}}{2\pi}$.

Откуда мы получим, что $L_\alpha = \alpha : 2\pi$. Давайте запишем это как формулу длины дуги окружности.

ФОРМУЛА ДЛИНЫ ДУГИ ОКРУЖНОСТИ

Длину L_α дуги окружности радиуса R, которая видна из её центра под углом α радиан, можно найти по формуле: $L_\alpha = \alpha \cdot R$.



$L_\alpha = \alpha \cdot R$

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

УПРАЖНЕНИЕ

8. Окружность радиуса 1 касается сторон угла величиной 1 рад в точках A и B. Найдите длину меньшей из дуг AB этой окружности (рис. 20).

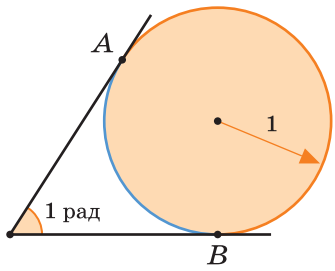


Рис. 20

Площадь круга

Замкнутая линия на плоскости ограничивает некоторую площадь. Если эта линия — многоугольник, найти его площадь можно, просто разбив многоугольник на треугольники. А что делать, если эта линия кривая? Например, если она окружность? В начале этого параграфа мы определяли длину окружности и приближали её многоугольниками, вписанными в эту окружность. Для вычисления площади круга давайте поступим так же: впишем в окружность многоугольник с большим числом сторон и найдём его площадь. Если каждая сторона такого многоугольника будет очень мала, то он почти не будет отличаться от окружности, а его площадь будет практически равна площади круга. Получить нужный многоугольник можно методом удвоения сторон* из любого треугольника, который вписан в эту окружность. Но проще вписать в окружность многоугольник, все стороны которого равны между собой, и сделать их число очень большим. Примерно так и поступил великий Архимед, когда доказывал теорему о площади круга. До него эту площадь вычисляли, пользуясь неточными формулами (рис. 21). Сам же Архимед формулировал свою теорему так:

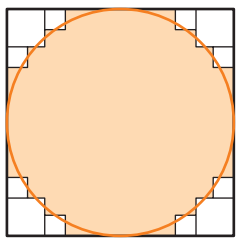
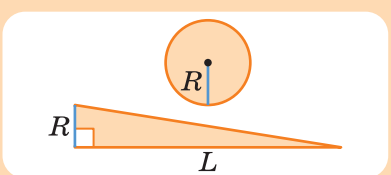


Рис. 21
По одной из гипотез так вычисляли площадь круга в Древнем Египте. Египтяне считали, что она составляет $\frac{64}{81}$ от площади квадрата, в который вписан круг. Интересно, что при этом ошибка составляла меньше процента.

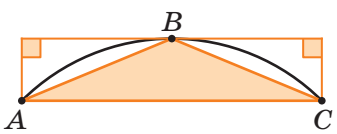
Всякий круг равновелик прямоугольному треугольнику, один катет которого равен радиусу круга, а другой — периметру его окружности.



Мы дадим современную формулировку теоремы Архимеда и назовём ее теоремой о площади круга.

---

* *Метод удвоения* заключается в том, что все дуги окружности между соседними вершинами вписанного многоугольника делят пополам и полученные точки добавляют к его вершинам. При этом каждый раз количество вершин многоугольника удваивается и можно доказать, что разница между площадью круга и многоугольника уменьшается более, чем в два раза. Поэтому после 10 таких удвоений площадь многоугольника будет отличаться от площади круга меньше чем на 0,001 его площади.



$$\frac{S_{\text{сегм}}}{2} < S_{\triangle ABC}$$

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДИ КРУГА

Площадь круга равна половине произведения его радиуса на длину окружности.

$$S_{\text{о}} = \frac{1}{2}L \cdot R$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Впишем в окружность n-угольник $A_1A_2...A_n$, все стороны которого имеют длину a (рис. 22) данной окружности. Проведём радиусы во все его вершины — они разделят многоугольник на n равнобедренных треугольников с вершиной в центре O данной окружности. Все эти треугольники будут равны по трём сторонам, а сумма их площадей будет составлять площадь всего многоугольника.

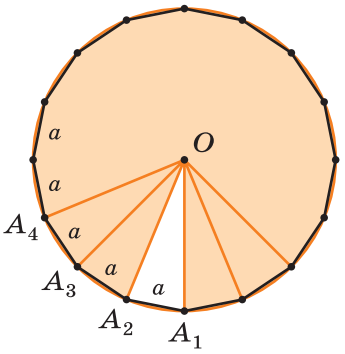


Рис. 22

Давайте вычислим площадь одного из таких треугольников A_1OA_2. Его боковые стороны равны радиусу R данной окружности, а основание имеет длину a. Опустим в этом треугольнике высоту на основание. Так как треугольник равнобедренный, то эта высота совпадает с медианой и разбивает его на два равных прямоугольных треугольника. Обозначим длину высоты за h (рис. 23) и запишем теорему Пифагора для одного из этих прямоугольных треугольников: $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$.

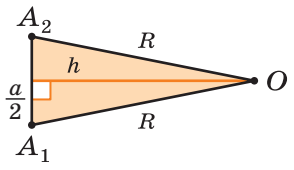


Рис. 23

Из полученного равенства видно, что если длина стороны a многоугольника становится близкой к нулю, то длина высоты h приближается радиусу R окружности. То есть $h \to R$, если $a \to 0$.

Площадь S треугольника A_1OA_2 найдём по формуле:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

Многоугольник состоит из n равных ему треугольников, поэтому можно найти его площадь S_n:

$$S_n = n \cdot S = n \cdot \left(\frac{1}{2}ah\right) = \frac{1}{2}h \cdot (na).$$

Поскольку периметр P_n многоугольника равен na, то последнее равенство можно записать так $S_n = \frac{1}{2}h \cdot P_n$.

Сделаем теперь число n сторон многоугольника очень большим. Тогда сам многоугольник будет почти неотличим от окружности, а его площадь S_n станет практически равна площади круга $S_{\text{о}}$. Периметр P_n многоугольника будет очень близок к длине L окружности, а его сторона будет близка нулю. Мы знаем, что в этом случае высота h будет мало отличаться от радиуса R окружности (рис. 24). Значит, при очень большом числе n сторон можно написать приближённое равенство $S_{\text{о}} \approx \frac{1}{2}R \cdot L$.

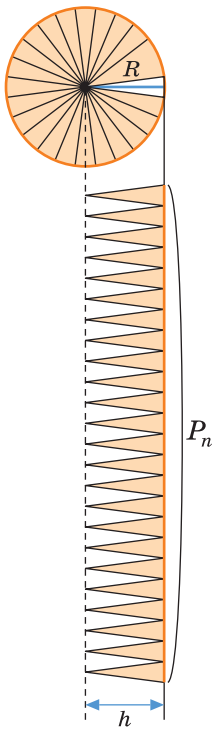


Рис. 24

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Это равенство будет выполняться тем точнее, чем больше число n сторон многоугольника. А при увеличении числа n до бесконечности мы получим, что

$$S_n \to S_o, \quad P_n \to L, \quad h \to R.$$

Тогда приближённое равенство станет уже точным:

$$S_o = \frac{1}{2} R \cdot L.$$

Значит, площадь круга будет равна половине произведения его радиуса на длину окружности.

Что и требовалось доказать.

Поскольку длина окружности равна $2\pi R$, то из доказанной теоремы легко вывести формулу для площади круга:

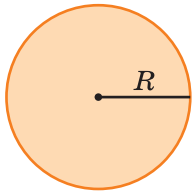
$$S_o = \frac{1}{2} R \cdot L = \frac{1}{2} R \cdot 2\pi R = \pi R^2.$$

Эту формулу легко запомнить и просто применять. Давайте её запишем как формулу для вычисления площади круга.

ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ КРУГА

Площадь круга радиуса R вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2.$$



Из формулы площади круга следует, что площади кругов относятся как квадраты их радиусов. В этом нет ничего удивительного, ведь круги — это подобные фигуры. Поэтому если в кафе вместо трёх одинаковых круглых пицц вам предлагают взять одну, но вдвое большего диаметра, то соглашайтесь не раздумывая!

Площадь круга можно вычислить на пальцах. Идею такого рассуждения придумал Леонардо да Винчи. Возьмём два одинаковых круга радиуса R и разрежем их на много одинаковых секторов. Потом раскроем каждый из них, как кружок апельсина, не отделяя от него кожуры (рис. 25). Если мы совместим зубчиками две эти «цитрусовые пилы», то получим один параллелограмм с высотой R и основанием, равным длине окружности $L = 2\pi R$ (рис. 26 а, б). Площадь этого параллелограмма будет равна $R \cdot L = 2\pi R^2$. Тогда мы получим, что удвоенная площадь S_o круга равна площади параллелограмма, то есть $2S_o = 2\pi R^2$. Откуда получим нужную формулу для площади круга $S_o = \pi R^2$.

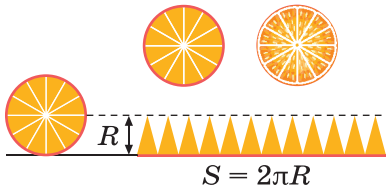


Рис. 25

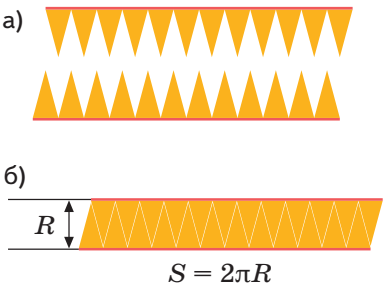


Рис. 26

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

УПРАЖНЕНИЯ

9. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью длиной: а) π; б) $10\sqrt{\pi}$; в) 62,83.

10. Найдите площадь кругов, изображённых на клетчатой бумаге, если сторона клетки равна 1. Как относятся друг к другу их площади (рис. 27)?

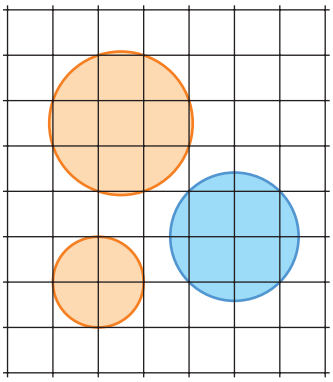


Рис. 27

11. Найдите площадь кольца, изображённого на клетчатой бумаге, если сторона клетки равна 1. (рис. 28).

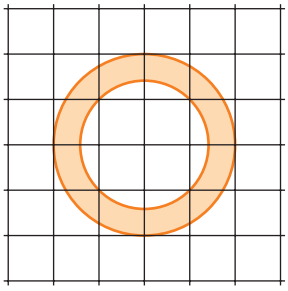


Рис. 28

12. Три металлических круглых диска одинаковой толщины с радиусами 40, 40 и 70 см переплавили в один диск такой же толщины. Чему будет равен радиус этого диска?

13. Катушка ниток имеет форму цилиндра с малым отверстием. Изначально в ней было 2000 м нитки. Сколько примерно метров нитки в ней останется, когда диаметр этой катушки уменьшится в два раза?

Площадь сектора круга

Площадь сектора круга так же линейно зависит от величины его угла, как и длина дуги окружности. Что это значит? Ровно то, что при разделе круглой пиццы на части площади её кусков будут относиться друг к другу так же, как относятся их углы в центре круга (рис. 29). Это очевидно, когда угол одного сектора в несколько раз больше угла другого. Но само утверждение будет верно во всех случаях. И обосновать его можно тем же способом, который мы использовали для получения длины дуги.

Давайте по аналогии с дугой окружности запишем соотношение для площади сектора круга и получим нужную формулу.

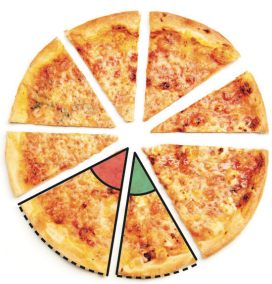
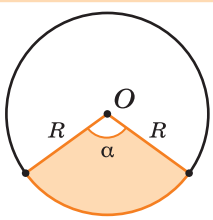


Рис. 29

Площадь сектора относится к площади всего круга как градусная мера его угла α к полному углу 360°.



$$\frac{S_{\text{сектора}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

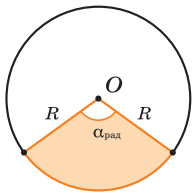
Формулу для площади сектора круга можно записать и через его угол, выраженный в радианах. Для этого нужно лишь помнить, что углу 360° соответствует 2π радиан. Тогда по аналогии мы получим пропорцию

$$\frac{S_{\text{сектора}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{\alpha_{\text{рад}}}{2\pi}.$$

Подставив в эту пропорцию выражение πR^2 для площади круга, получим формулу площади сектора.

ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ СЕКТОРА

Сектор круга радиуса R, угол которого равен $\alpha_{\text{рад}}$, имеет площадь: $\dfrac{\alpha_{\text{рад}} \cdot R^2}{2}$.



Интересно, что площадь сектора круга можно найти тем же методом Архимеда и получить $S_{\text{сектора}} = \dfrac{R \cdot L_\alpha}{2}$.

УПРАЖНЕНИЯ

14. Найдите площадь сектора круга, если его радиус равен 2, а длина дуги составляет: а) π; б) 3.

15. Найдите площадь круговых секторов, показанных на клетчатой бумаге. Сторона клетки равна 1 (рис. 30).

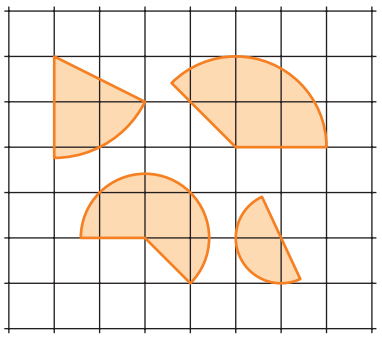


Рис. 30

16. Из бумаги вырезали сектор круга радиуса 24 см с прямым углом, а потом свернули из него коническую воронку (рис. 31). Найдите радиус R окружности, идущей по краю этой воронки.

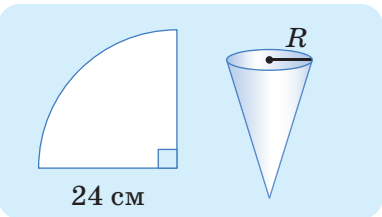


Рис. 31

ВОПРОСЫ

1. Какие способы измерения длины кривой вы знаете?
2. Что означает число π? Чему оно равно?
3. Во сколько раз длина окружности больше её радиуса?
4. Как зависит длина дуги окружности от её градусной меры?
5. Чему равна длина дуги окружности радиуса 6, градусная мера которой равна 60°?
6. Что такое 1 радиан? Сколько радиан соответствует прямому углу?
7. Чему равна длина дуги сектора радиуса 5 с центральным углом, равным 2 радиана?
8. По какой формуле вычисляют площадь круга?
9. Какую формулу площади кругового сектора вы знаете?

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1. ★☆☆ Город имеет форму круга, по границе которого проходит дорога. Путь между точками A и B по окружной дороге оказался равен пути между ними через центр города. Чему равен угол α между двумя проспектами, идущими из точек A и B в центр?

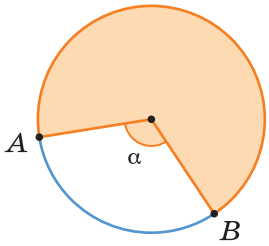


Рис. 32

РЕШЕНИЕ

Пусть O — центр города, а R — радиус его круга. Обозначим величину угла AOB за α радиан (рис. 32). Путь между точками A и B по окружной дороге будет равен длине дуги AB окружности, поэтому он равен $\alpha \cdot R$. Длина пути через центр города равна $2R$. По условию $\alpha \cdot R = 2R$. Откуда $\alpha = 2$ рад $\approx 114°$.

Ответ: 2 радиана.

ПРИМЕР 2. ★☆☆ Две окружности радиуса 1 проходят через центры друг друга. Найдите площадь пересечения кругов, образованных этими окружностями (рис. 33).

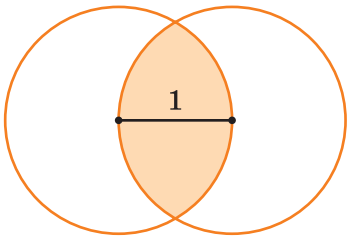


Рис. 33

РЕШЕНИЕ

Пусть окружности радиуса 1 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Поскольку центр O_1 первой окружности лежит на окружности с центром O_2, то $O_1O_2 = 1$. Значит, треугольники AO_1O_2 и BO_1O_2 равносторонние и все их углы равны 60° (рис. 34). Площадь каждого из этих треугольников найдём по формуле

$$S_\Delta = \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 60°}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Пересечение данных кругов состоит из этих двух равносторонних треугольников и четырёх круговых сегментов, прилегающих к их сторонам.

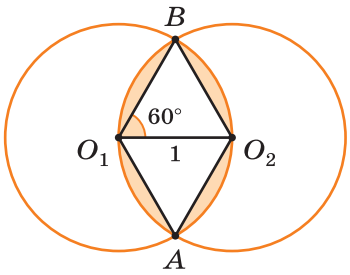


Рис. 34

Давайте найдём площадь сегмента, прилегающего к стороне BO_2 (рис. 35). Поскольку угол BO_1O_2 равен 60°, то сектор круга с центром O_1 и дугой BO_2 составляет шестую часть этого круга. Значит, его площадь будет равна $\pi : 6$. Чтобы найти площадь сегмента, вычтем из площади этого сектора площадь треугольника BO_1O_2. Тогда мы получим, что $S_{\text{сегм}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

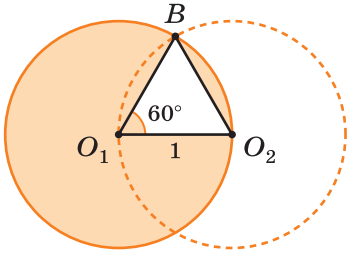


Рис. 35

Площади остальных трёх сегментов будут такими же. Теперь можно найти площадь пересечения кругов

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + 4 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}29.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ПРИМЕР 3. ★★☆ Фигура, образованная тремя полуокружностями с концами в точках A, B и C, лежащих на одной прямой, называется арбелосом Архимеда. Найдите площадь арбелоса, если отрезок CK, перпендикулярный диаметрам полуокружностей, равен h (рис. 36).

Арбелосом в древних Сиракузах называли нож, которым кожевенники разрезали шкуры животных. В точке C его насаживали на деревянную рукоять.

РЕШЕНИЕ

Обозначим длины отрезков AC и BC за a и b. Тогда длина отрезка AB будет $a + b$ (рис. 37). Каждый из этих отрезков — диаметр своей окружности, поэтому их радиусы будут соответственно равны $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$ и $\frac{1}{2}(a+b)$. Полукруги с такими диаметрами будут иметь площади

$$\frac{\pi\cdot a^2}{8},\ \frac{\pi\cdot b^2}{8} \text{ и } \frac{\pi\cdot(a+b)^2}{8}.$$

Тогда площадь S арбелоса будет равна

$$S = \frac{\pi\cdot(a+b)^2}{8} - \frac{\pi\cdot a^2}{8} - \frac{\pi\cdot b^2}{8} = \frac{\pi\cdot 2ab}{8} = \frac{\pi\cdot ab}{4}.$$

Теперь давайте вспомним, что из точек окружности её диаметр всегда виден под прямым углом. Значит, угол AKB равен 90°. Поэтому треугольник AKB прямоугольный, а отрезок CK — это его высота, опущенная на гипотенузу (рис. 38). По свойству прямоугольного треугольника высота равна среднему геометрическому отрезков, на которые она разбивает его гипотенузу. Поэтому $h = \sqrt{ab}$. Откуда следует, что $ab = h^2$.

Теперь площадь арбелоса Архимеда можно выразить через h:

$$S = \frac{\pi ab}{4} = \frac{\pi h^2}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi h^2}{4}$.

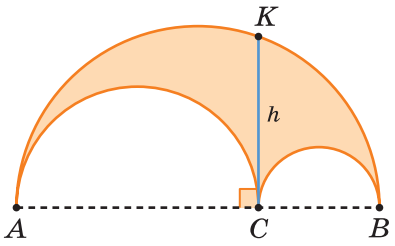


Рис. 36

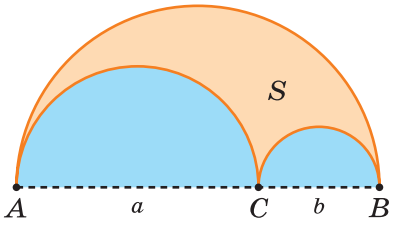


Рис. 37

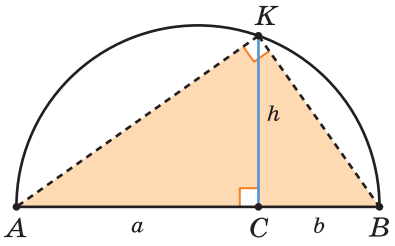


Рис. 38

ПРИМЕР 4. ★★☆ Докажите, что для острого угла α радиан выполняется двойное неравенство: $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим окружность с центром O и радиусом R. Проведём в этой окружности радиусы OA и OB так, чтобы $\angle AOC = \alpha$. Тогда длина дуги AB окружности, лежащая внутри этого угла, будет равна $R\alpha$. Длина дуги AB по определению больше длины любой вписанной в неё простой ломаной. Значит, она больше длины хорды AB окружности. Поэтому $AB < R\alpha$.

Опустим из точки B перпендикуляр BH на прямую OA (рис. 39). Тогда из прямоугольного треугольника OBH можно найти, что $BH = OB \cdot \sin\alpha = R \cdot \sin\alpha$.

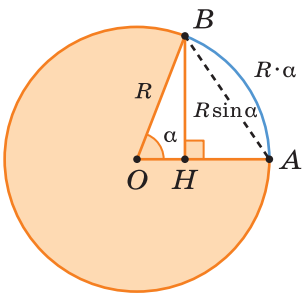


Рис. 39

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Перпендикуляр к прямой всегда короче наклонной, проведённой из той же точки, поэтому $BH < BA$. Значит, $R\sin\alpha < AB < R\alpha$. Откуда $\sin\alpha < \alpha$. Таким образом, мы доказали, что синус острого угла всегда меньше величины этого угла в радианах.

Теперь докажем вторую часть двойного неравенства. Для этого проведём касательную к окружности в точке A и пересечём её с прямой OB в точке C (рис. 40). По свойству касательной угол OAC будет равен 90°. Тогда из прямоугольного треугольника AOC мы получим, что $AC = R \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Найдём площадь этого треугольника:

$$S_{AOC} = \frac{1}{2}OA \cdot CA = \frac{1}{2}R^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

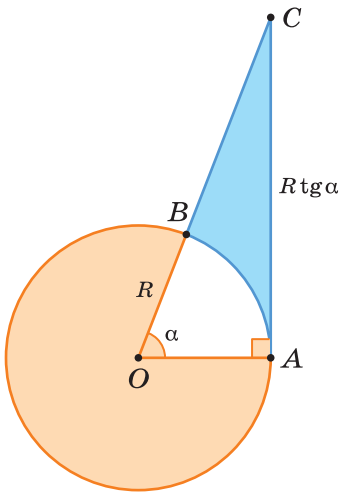


Рис. 40

Найдём теперь площадь S сектора AOB круга:

$$S = \frac{\alpha \cdot R^2}{2}.$$

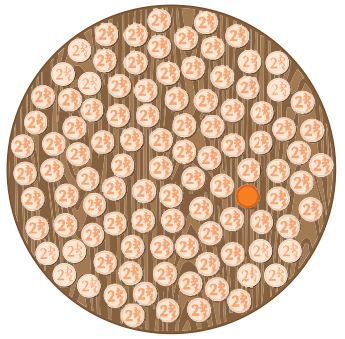
Сектор AOB целиком содержится в треугольнике AOC, поэтому $S < S_{AOC}$. Значит,

$$\frac{\alpha \cdot R^2}{2} < \frac{R^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{2}.$$

Откуда получим, что $\alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 5. ★★★ На круглом столе радиуса 25 лежат 156 монет радиуса 1, и они не касаются друг друга. Всегда ли на этот стол можно положить ещё одну такую же монету так, чтобы она не коснулась других монет (рис. 41)?


Рис. 41

РЕШЕНИЕ

Построим 156 кругов радиуса 2, центры которых совпадают с центрами монет, лежащих на столе. Сумма их площадей равна $156 \cdot \pi \cdot 2^2 = 624\pi$. Площадь же всего стола равна $\pi \cdot 25^2 = 625\pi$. Значит, сумма площадей построенных кругов меньше площади стола и они не могут полностью покрыть все точки этого стола.

Рассмотрим точку A на столе, которую не покрывает ни один из кругов радиуса 2. Расстояние от неё до центра любого из них больше 2 (рис. 42). Положим на стол ещё одну монету радиуса 1 так, чтобы её центр совпадал с точкой A. Тогда она не будет касаться ни одной из других монет, лежащих на столе. Значит, на стол всегда можно положить ещё одну монету.

Ответ: всегда можно.

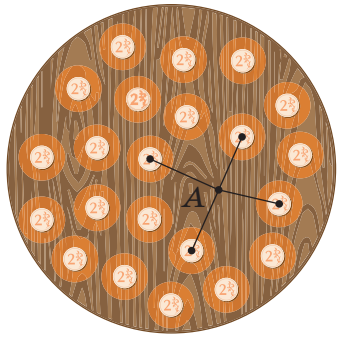


Рис. 42

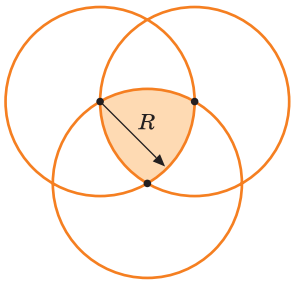
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 4



задача 5



задача 9

ЗАДАЧИ

1. ★☆☆ Известно, что у большинства людей расстояние между кончиками пальцев вытянутых в стороны рук совпадает с их ростом. Человек охватил ствол дерева руками и понял, что пальцы его рук соприкоснулись. Найдите диаметр ствола, если рост человека 173 см.

2. ★☆☆ Столяр хочет изготовить круглый стол на 6 персон. Каким должен быть диаметр этого стола, чтобы на каждого человека за столом приходилось около 60 см его окружности?

3. ★☆☆ Какое наибольшее число людей можно рассадить за круглым столом радиуса 1 м, если на каждого человека должно приходиться не менее 60 см его окружности?

4. ★☆☆ Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского Кремля равна 3,5 м. На сколько сантиметров сдвинется конец этой стрелки за 1 минуту? (▸▸ рис.)

5. ★☆☆ В Восточной Англии строят заборы толщиной в один кирпич, которые идут «волнами». Считая, что каждая волна — это половина окружности, оцените по рисунку, сколько кирпичей нужно на такой забор, если он сложен из 12 рядов кирпичей, а расстояние между начальной и конечной точками по прямой 50 м. Длина одного кирпича составляет 25 см. (▸▸ рис.)

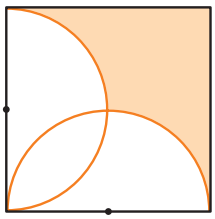
6. ★☆☆ Москва и Новороссийск расположены на одном меридиане под 55° и 44° северной широты. Найдите расстояние между этими городами по земной поверхности, если длина земного меридиана около 40 000 км.

7. ★☆☆ Ведро из колодца поднимают, наматывая цепь на ворот с диаметром 20 см. Чтобы поднять ведро, нужно сделать 20 оборотов ворота. Найдите глубину колодца.

8. ★☆☆ Поезд идёт со скоростью 90 км/ч. Сколько оборотов за одну минуту делает колесо поезда, если его диаметр 95 см?

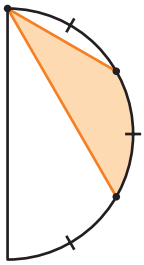
9. ★☆☆ Треугольник Рёло образован пересечением трёх кругов радиуса R, окружность каждого из которых проходит через центры двух других. Найдите периметр и площадь этого треугольника. (▸▸ рис.)

10. ★☆☆ На двух соседних сторонах квадрата, как на диаметрах, построили круги. Найдите площадь части квадрата, не покрытой этими кругами, если его сторона равна 1. (▸▸ рис.)

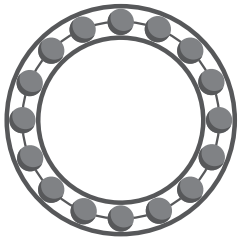


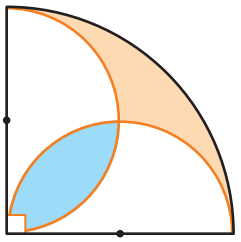
задача 10

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022









задача 11 · задача 16, 17 · задачи 18, 19 · задача 21

11. ★☆☆ Через конец диаметра полукруга проведены две хорды, делящие его полуокружность на три равные части. Какая часть площади полукруга находится между этими хордами? (рис.)

12. ★☆☆ В окружности радиуса 1 проведены две непересекающиеся хорды с длинами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Как относятся длины меньших дуг, соответствующих этим хордам?

13. ★☆☆ Из одной точки окружности радиуса 1 провели две хорды с длинами 1 и $\sqrt{2}$. Найдите длину дуги окружности, находящейся внутри угла, образованного этими хордами.

14. ★☆☆ Окружность касается сторон угла в двух точках. Разность длин дуг этой окружности с концами в этих точках равна её радиусу. Найдите величину угла.

15. ★☆☆ Центры четырёх окружностей радиуса 1 находятся в вершинах единичного квадрата. Найдите периметр фигуры их пересечения.

16. ★☆☆ Поле стадиона имеет форму прямоугольника, на противоположных сторонах которого построены два полукруга. Длина беговой дорожки вокруг этого поля равна 400 м. Найдите ширину поля стадиона, если прямолинейные участки этой дорожки имеют длину 100 м. (рис.)

17. ★★☆ Поле стадиона имеет форму прямоугольника, на противоположных сторонах которого построены два полукруга. По периметру поля идут беговые дорожки, на которых проходят соревнования. На какое расстояние должны быть сдвинуты точки старта бегунов на соседних дорожках, если ширина каждой дорожки равна 2 м? (рис.)

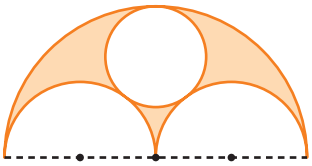
18. ★★☆ Круглый подшипник состоит из 26 стальных шариков диаметра 10 мм. Найдите радиус внутреннего круга этого подшипника, если он сделан из стали толщиной 2 мм, а расстояние между его соседними шариками равно их радиусу. (рис.)

19. ★★☆ Диаметр внутреннего кольца подшипника равен 8 см, а внешнего — 12 см. Определите, сколько в нём шариков, если толщина каждого кольца равна 2 мм, а расстояние между всеми соседними шариками в подшипнике равно их радиусу. (рис.)

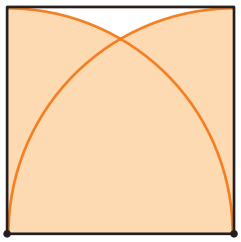
20. ★★☆ На катушку диаметра 40 см плотно намотана бумажная лента. Толщина намотанного рулона равна 10 см. Сколько примерно метров ленты намотано на катушку, если толщина бумаги равна 0,2 мм?

21. ★★☆ Дан сектор круга с углом 90°. На его радиусах, как на диаметрах, внутри сектора построили два полукруга. Докажите, что площадь пересечения этих полукругов равна площа-

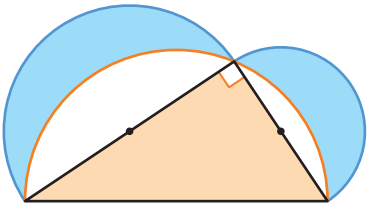
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 22



задача 23



задача 24

ди части сектора, ими не покрытой. Найдите эту площадь, если радиус сектора равен 1. (рис.)

22. ★★☆ Найдите площадь закрашенной части полукруга на рисунке, если его радиус равен 6. (рис.)

23. ★★☆ Два круга имеют центры в соседних вершинах квадрата, а их радиусы равны его стороне. Сколько процентов площади квадрата не покрыта этими кругами? (рис.)

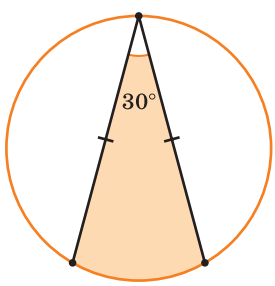
24. ★★☆ *(Луночки Гиппократа)* Прямоугольный треугольник вписан в окружность. На его катетах, как на диаметрах, построили круги. Части этих кругов, находящиеся вне описанной окружности треугольника, образуют так называемые луночки. Докажите, что сумма площадей двух таких луночек равна площади данного треугольника. (рис.)

25. ★★☆ Из одной точки окружности провели две равные хорды, образующие угол 30°. Какая часть площади круга находится между этими хордами? (рис.)

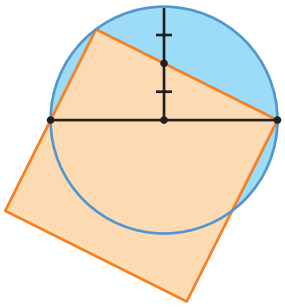
26. ★★☆ Через середину дуги полукруга провели прямую, отсекающую от него треть площади. В каком отношении эта прямая делит диаметр полукруга?

27. ★★☆ *(Приближённая квадратура круга)* Известен способ построения квадрата, площадь которого приближённо равна площади круга: через один конец диаметра круга и середину перпендикулярного ему радиуса проводят хорду. Тогда площадь квадрата, построенного на этой хорде, приблизительно равна площади круга. Чему должно было быть равно число π, чтобы это построение действительно давало квадратуру круга? (рис.)

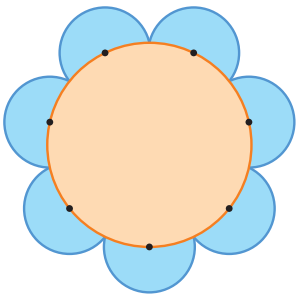
28. ★★☆ Цветок имеет семь лепестков, образованных дугами семи окружностей радиуса 1, центры которых лежат на некоторой окружности. Найдите периметр цветка. (рис.)



задача 25

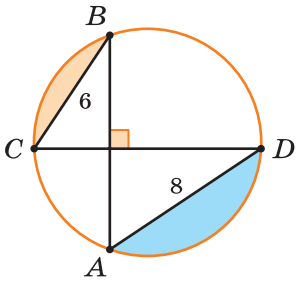


задача 27

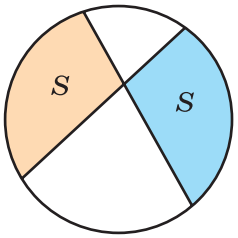


задача 28

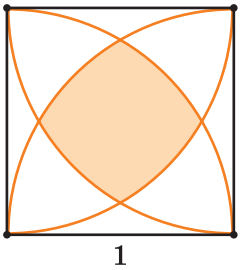
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 29



задача 30



задача 31

29. ★★☆ В окружности провели две перпендикулярные хорды AB и CD. Длины отрезков BC и AD равны 6 и 8. Найдите сумму площадей непересекающихся сегментов круга, отсечённых этими отрезками. (▸▸ рис.)

30. ★★★ Две пересекающиеся хорды делят круг на четыре части. Площади двух из них, не имеющие общего отрезка, равны. Докажите, что сами хорды равны. (▸▸ рис.)

31. ★★★ Центры четырёх кругов радиуса 1 находятся в вершинах единичного квадрата. Найдите площадь их пересечения. (▸▸ рис.)

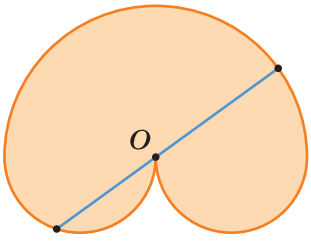
32. ★★★ Из одной точки к кругу проведены две касательные и секущая. Секущая образует с касательными углы 75° и 15°. В каком отношении эта секущая делит площадь круга?

33. ★★★ Фигура на рисунке состоит из трёх полуокружностей, центры которых лежат на одной прямой. Точка O — центр большей из них. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку O, делит периметр фигуры пополам. (▸▸ рис.)

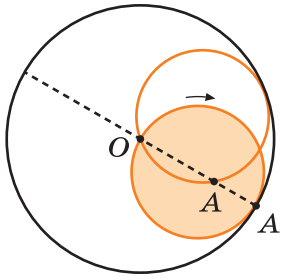
34. ★★★ По неподвижной монете радиуса 2 без проскальзывания катится монета радиуса 1. Сколько оборотов вокруг собственной оси совершит меньшая монета, когда сделает полный оборот вокруг большей?

35. ★★★ *(Задача Кеплера)* По неподвижной окружности, касаясь её изнутри, без проскальзывания катится окружность вдвое меньшего радиуса. Докажите, что заданная точка меньшей окружности всегда движется по прямой. (▸▸ рис.)

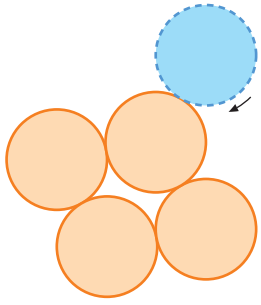
36. ★★★ По цепочке из четырёх неподвижных одинаковых монет, каждая из которых касается двух других, без проскальзывания катится пятая такая же монета. Сколько оборотов вокруг собственной оси сделает эта монета, пока три раза обернётся вокруг всей цепочки? (▸▸ рис.)



задача 33



задача 35



задача 36

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Фракталы

Методом спрямления можно найти длину большинства известных нам кривых линий. Например, это можно сделать для дуги любой окружности, эллипса или параболы. Поэтому их и называют спрямляемыми. Хотя таковы не все кривые линии. Оказалось, что некоторые кривые в окружающем нас мире вообще не имеют длины. Вернее, их длина может быть сколько угодно велика. Правда, обнаружили такие кривые только в XX веке.

Первый раз это случилось в 1951 году, когда английский учёный Льюис Ричардсон изучал политическую карту мира. Будучи убеждённым пацифистом, он искал причины возникновения конфликтов между государствами и пытался определить вероятность войны между ними в зависимости от длины их общей границы. Собирая данные, Ричардсон обнаружил, что длина границы между Испанией и Португалией в испанских справочниках составляла 987 км, а в португальских — 1214 км. Похожее различие наблюдалось и для границы между Бельгией и Голландией. Эту разницу он объяснил очень просто: для вычисления длины общей границы в этих странах использовали разные единицы измерения. Но Ричардсон пошёл дальше: он стал вычислять длину береговой линии Англии. При уменьшении единицы измерения длина берегов его родного острова стала стремительно увеличиваться... Это явление потом назвали парадоксом береговой линии (рис. 43). Оказалось, что линия берега любого острова или континента в некотором смысле «бесконечно извилиста», то есть она сохраняет это свойство даже при сильном увеличении. Обычные кривые, такие, как окружность или парабола, при сильном увеличении выглядят иначе: на каждом своём малом участке они приближаются к отрезку прямой (рис. 44). Поэтому в поезде на кольцевой линии метро вам кажется, что вы едете прямо.

Протяжённость берегов принято измерять в километрах или милях, но если мы захотим измерить их с шагом в 1 м, то нам придётся учесть все мелкие детали рельефа:



Единица = 100 км
Длина ≈ 2800 км

Единица = 50 км
Длина ≈ 3400 км

Рис. 43



Рис. 44



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

выступы и зигзаги берега, все мысы его и заливы. А при шаге измерения в 1 см сделать это будет просто невозможно, ведь тогда граница суши пройдёт уже по каждому морскому камешку и будет меняться от набегающих волн каждую минуту. Такие «бесконечно извилистые», как морской берег, линии французский математик Мандельброт позже назвал фракталами. Это слово он образовал от латинского прилагательного *fractus*, что означает «изломанный». Оказалось, что фракталы часто встречаются в природе. Такую форму имеют любой естественный остров или горный хребет, облако или озеро, молния, крона дерева или даже система альвеол наших лёгких.

Интересно, что самый первый фрактал был обнаружен человеком вовсе не в природе, а в классической геометрии. Его придумал в 1904 году шведский математик Хельге фон Кох на листе бумаги и назвал снежинкой (рис. 45). Он создал свою снежинку так: взял правильный треугольник, разделил каждую его сторону на три равные части и построил на средних частях всех сторон правильные треугольники. Так он получил равносторонний 12-угольник, с которым опять проделал ту же операцию: разделил его стороны на три равные части и на их средних частях построил правильные треугольники. Дальше он повторял данную операцию, пока это было возможно. Так он получил равносторонние многоугольники с 48, 192 и 768 сторонами, которые своей формой всё больше напоминали снежинки (рис. 46). Ну а идеальная снежинка, которую в пределе можно получить лишь за бесконечное число таких операций, должна быть уже настоящим фракталом. Под любым увеличением даже малый участок её границы будет бесконечно изломанным, и выглядеть такая снежинка будет по-настоящему «пушистой», как будто в иголочках инея.

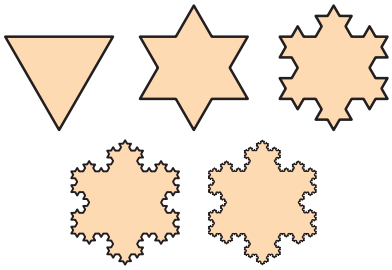


Рис. 45
Построение снежинки

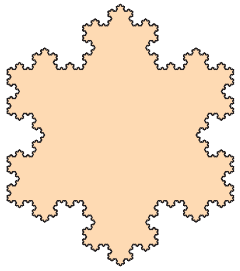


Рис. 46
Снежинка Коха.
Первый фрактал в геометрии



Фотография настоящей снежинки, сделанная с помощью камеры смартфона

УПРАЖНЕНИЯ

17. Периметр правильного треугольника равен 1. Из него методом фон Коха на каждом шаге получают равносторонние многоугольники.
а) Сколько сторон будет иметь многоугольник после 5, n таких шагов?
б) Может ли периметр предельной снежинки Коха быть равен определённому числу?

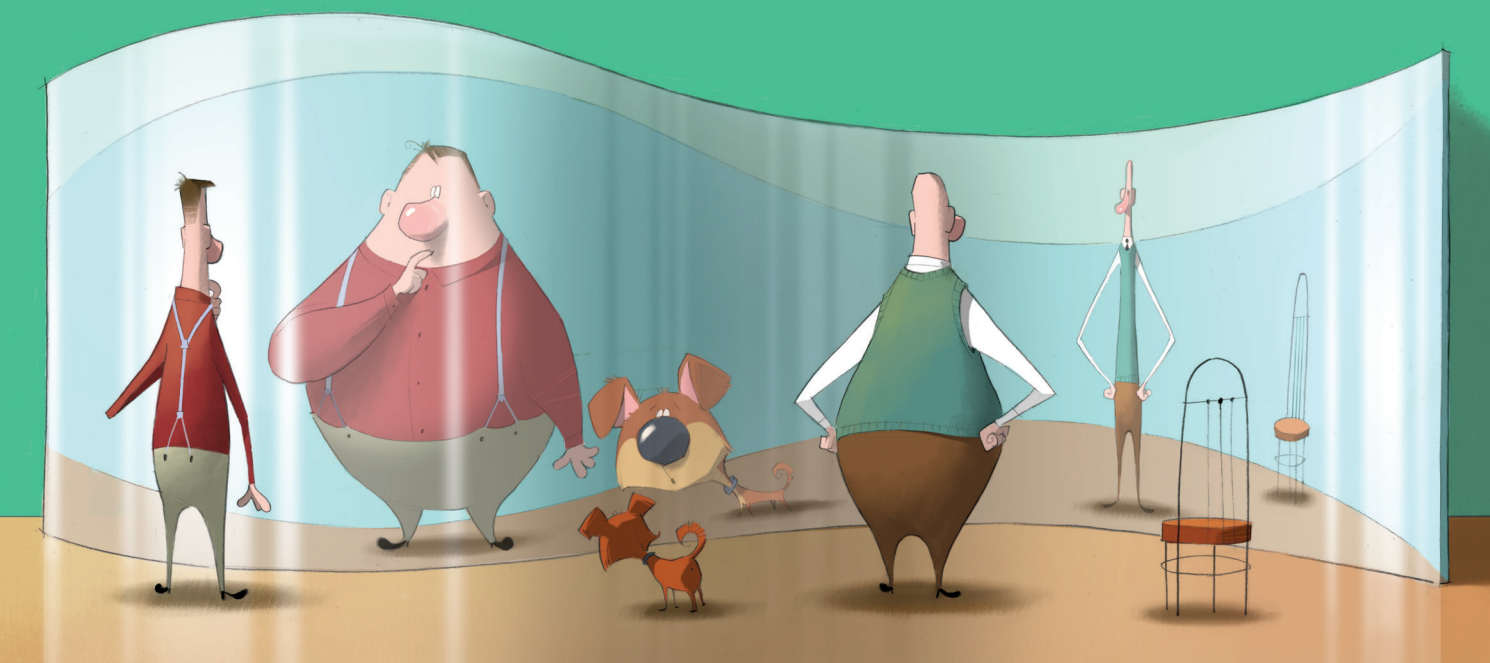
18. Из правильного треугольника с площадью 1 методом фон Коха получают равносторонние многоугольники.
а) Найдите площадь такого многоугольника после 2, 3, n шагов.
б) Найдите площадь предельной снежинки Коха.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

4 ГЛАВА

Преобразования

§11. Движения



§11 Движения

Преобразования

Вся классическая геометрия основана на равенстве или подобии фигур. Можно сказать, что без этих понятий не было бы и самой геометрии. Равенство фигур служит для человека математической моделью мысленного совмещения предметов, когда у них должны совпадать все их размеры. Подобие же фигур служит математической моделью пропорционального увеличения (или уменьшения) размеров предметов, при котором они сохраняют свою форму. Например, любые два круга имеют одинаковую форму, или подобны друг другу, но равны они будут, только если равны радиусы этих кругов.

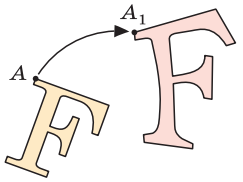


В общем виде преобразования не всегда сохраняют размеры и форму фигур

В геометрии равенство и подобие фигур определяют через расстояния между всеми соответственными точками этих фигур. У двух равных фигур все такие расстояния должны быть соответственно равны, у подобных — отличаться в одно и то же число раз. В любом случае, для того чтобы определить равенство или подобие двух фигур, нужно установить соответствие между всеми их точками. Это значит, что нужно указать правило, по которому каждой точке одной фигуры ставится в соответствие только одна точка другой фигуры. Эту точку называют **образом**, а само правило — **преобразованием фигуры**. Давайте запишем это как определение преобразования.

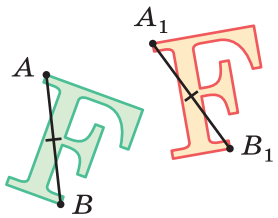
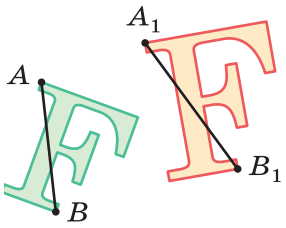
Фигура F_1 получается **преобразованием** из фигуры F, если каждой точке A фигуры F соответствует единственная точка A_1 фигуры F_1.

Точку A_1 называют **образом** точки A при преобразовании.

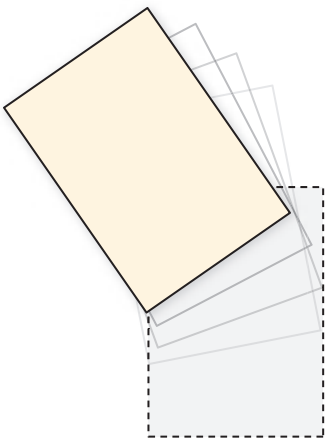


Давайте теперь с помощью понятия преобразования запишем определения равенства и подобия двух фигур. Пусть фигура F_1 получается из фигуры F преобразованием, которое каждой её точке A в соответствие ставит точку A_1 другой фигуры, а каждой её точке B — точку B_1.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Фигуры F и F_1 равны, если $A_1B_1 = AB$ для любых пар точек.	Фигуры F и F_1 подобны, если существует такое положительное число k, что $A_1B_1 = k \cdot AB$ для любых пар точек.
	
Преобразование фигуры, которое не меняет расстояние между всеми её точками, называют движением фигуры.	Преобразование фигуры, при котором расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, называют подобием фигуры.

Поскольку плоскость — это тоже фигура, то часто говорят о преобразовании всей плоскости. Существует много различных преобразований плоскости, например, растяжение или сжатие относительно прямой, симметрия относительно окружности (инверсия) и др. Все они изменяют форму фигур: окружность при сжатии становится эллипсом, а при инверсии она вообще может превратиться в прямую. Но самыми естественными из преобразований являются *движения* и *подобия*. Почему же именно они? Просто эти преобразования сохраняют форму геометрических фигур. Мы с вами убедимся, что при движениях и подобиях прямые линии остаются прямыми, а величины углов не меняются. С одним важным случаем преобразования подобия вы уже знакомы. Им является *гомотетия* — растяжение плоскости относительно одной точки. Давайте теперь познакомимся с различными движениями плоскости и узнаем, какие бывают виды этих движений.



Свойства движений

Мы начнём с того, что дадим определение движения в геометрии. Своё название этот вид преобразования получил потому, что движение является моделью физического движения твёрдых предметов. Если вода в реке или облако на небе могут принимать любую форму, то размеры и форма твёрдых предметов при движении остаются неизменными и сохраняются расстояния между всеми их точками (рис. 1).

Отсюда и следует естественное определение движения. Нужно только иметь в виду, что геометрические фигуры не всегда можно передвигать физически, как материальные предметы. Например, как бы вы передвинули участок земли или рисунок, сделанный на листе бумаги? Но мысленно

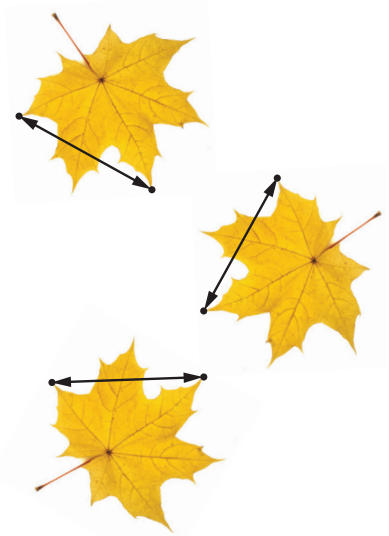


Рис. 1

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

это всегда можно сделать, если вместе с рисунком передвинуть саму бумагу или всю плоскость вместе с данной на ней фигурой.

Движением фигуры (или всей плоскости) называют такое преобразование, которое не меняет расстояний между её точками.

Из этого определения следуют общие свойства всех движений. Давайте с ними сейчас познакомимся. Ясно, что по определению движение сохраняет длины всех отрезков. Но почему отрезки остаются отрезками, а не преобразуются, например, в дуги окружностей? На этот вопрос отвечает первое свойство движения.

ПЕРВОЕ СВОЙСТВО ДВИЖЕНИЯ

Движение преобразует отрезок в равный ему отрезок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Возьмём произвольный отрезок AB и отметим на нём любую точку C. Тогда по аксиоме отрезков должно выполняться равенство

$$AC + BC = AB. \quad (1)$$

Пусть образами точек A, B и C при некотором движении будут соответственно точки A_1, B_1 и C_1. Тогда по определению движения

$$A_1C_1 = AC,\ B_1C_1 = BC,\ A_1B_1 = AB.$$

Отсюда следует, что для точек A_1, B_1 и C_1 выполняется такое же равенство

$$A_1C_1 + B_1C_1 = A_1B_1. \quad (2)$$

Предположим, что точка C_1 не лежит на прямой A_1B_1 (рис. 2). В этом случае точки A_1, B_1 и C_1 образуют треугольник $A_1B_1C_1$. Но тогда для этого треугольника должно выполняться неравенство

$$A_1C_1 + B_1C_1 > A_1B_1.$$

Полученное неравенство противоречит равенству (2). Значит, точка C_1 должна лежать на прямой A_1B_1.

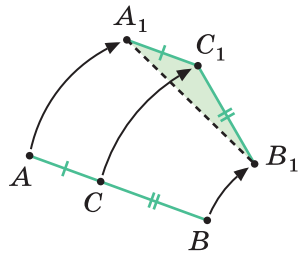


Рис. 2

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Предположим теперь, что точка C_1 лежит на продолжении отрезка A_1B_1. В этом случае отрезок A_1B_1 будет короче отрезка B_1C_1 либо отрезка A_1C_1 (рис. 3). Это тоже противоречит равенству (2).

Поэтому для точки C_1 остаётся только одна возможность: она должна лежать на отрезке A_1B_1. Значит, образ любой точки C отрезка AB должен принадлежать отрезку A_1B_1. А поскольку $A_1B_1 = AB$, то любой отрезок при движении преобразуется в равный ему отрезок.

Что и требовалось доказать.

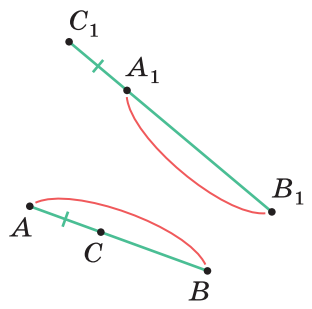


Рис. 3

Из первого свойства движения сразу следует второе его свойство.

ВТОРОЕ СВОЙСТВО ДВИЖЕНИЯ

При движении луч преобразуется в луч, а прямая — в прямую.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Докажите второе свойство движения.

Итак, любое движение сохраняет отрезки, лучи и прямые. Давайте теперь докажем, что при движении сохраняются и величины всех углов. И в этом заключается его третье свойство.

ТРЕТЬЕ СВОЙСТВО ДВИЖЕНИЯ

Движение сохраняет величины углов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть дан угол с вершиной в точке O и точками A и B на его сторонах. Предположим, что при некотором движении точка O перешла в точку O_1, а точки A и B соответственно в точки A_1 и B_1 (рис. 4).

Так как движение луч переводит в луч, то угол AOB оно переведёт в угол $A_1O_1B_1$. А поскольку при движении

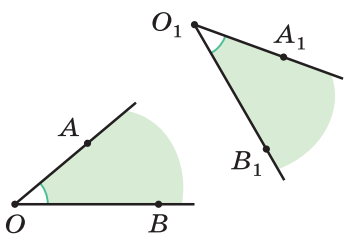


Рис. 4

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

расстояния между точками не меняются, то должны выполняться равенства $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$, $AB = A_1B_1$.

Но тогда треугольники AOB и $A_1O_1B_1$ будут равны по трём сторонам (рис. 5). Значит, будут равны их углы при вершинах O и O_1. То есть движение преобразует угол в равный ему угол.

Что и требовалось доказать.

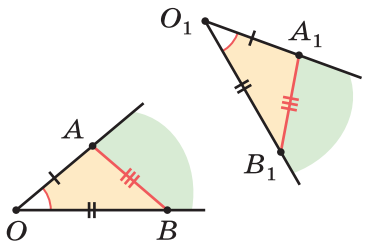


Рис. 5

УПРАЖНЕНИЯ

2. Докажите, что движение переводит окружность в окружность того же радиуса.

3. Докажите, что последовательное применение двух движений тоже является движением.

4. Движение переводит точки A и B соответственно в точки A_1 и B_1, изображённые на клетчатой бумаге. Какая точка будет образом точки C при этом движении? Сколько всего может быть таких точек (рис. 6)?

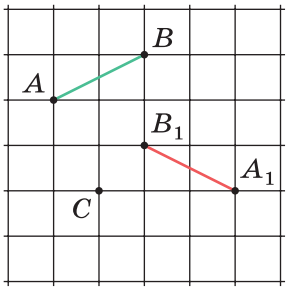


Рис. 6

5. Движение переводит треугольник ABC, изображённый на клетчатой бумаге, в треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 7). Какая точка будет образом точки D при этом движении? Сколько всего может быть таких точек?

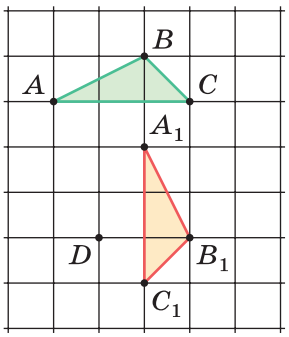


Рис. 7

Если вы сделали два последних упражнения, то наверняка заметили, что в одном из них существуют две нужные точки, а в другом — только одна. Это значит, что могут быть два различных движения, при которых отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1. А вот движение, которое преобразует треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$, может быть лишь одно. То есть образы всего трёх точек, не лежащих на одной прямой, при движении определяют образы всех других точек. Другими словами, движение одного треугольника полностью задаёт движение всей плоскости. Образно можно сказать, что плоскость, как лист фанеры, «прибита гвоздями» к вершинам треугольника и поэтому движется вместе с ним. В этом заключается ещё одно свойство всех движений, которое мы запишем как теорему.

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Любое движение плоскости однозначно определяется по перемещению одного треугольника.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Будем рассуждать от обратного. Предположим, что перемещение трёх вершин одного треугольника не определяет однозначно движение всей плоскости. Тогда должны существовать два различных движения плоскости, каждое из которых преобразует треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$. Если эти движения различаются, то хотя бы для одной точки M на плоскости они должны давать разные образы. Пусть первое движение переводит точку M в точку M_1, а второе — в точку M_2 (рис. 8).

Поскольку любое движение сохраняет расстояния между точками, то выполняются равенства $A_1M_1 = AM = A_1M_2$, $B_1M_1 = BM = B_1M_2$, $C_1M_1 = CM = C_1M_2$.

Из этих равенств следует, что вершины треугольника $A_1B_1C_1$ равноудалены от точек M_1 и M_2 (рис. 9). Но тогда они должны лежать на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2, то есть на одной прямой! Конечно, этого не может быть ни для какого треугольника. Полученное противоречие показывает, что есть только одно движение, которое переводит треугольник ABC в равный ему треугольник $A_1B_1C_1$. То есть перемещение одного треугольника однозначно определяет движение всей плоскости.

Что и требовалось доказать.

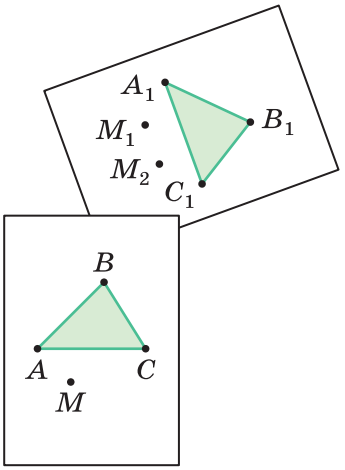


Рис. 8

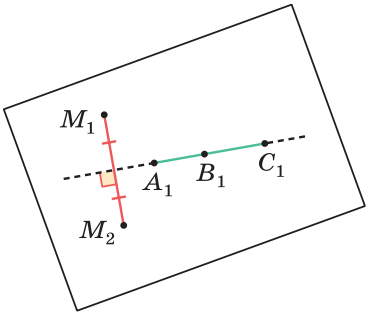


Рис. 9

Виды движений

Из повседневной жизни нам всем знакомы несколько видов движений. И в самом языке существуют глаголы: *переносить, поворачивать, отражаться*. Каждый из них соответствует одному из основных движений в геометрии: *параллельному переносу, повороту* вокруг точки и *симметрии* относительно прямой. Поднимаясь на лифте или на эскалаторе, вы совершаете параллельный перенос. Когда движетесь на карусели или колесе обозрения, совершаете поворот. А когда смотрите на гладь озера или на своё отражение в плоском зеркале, то имеете дело с осевой симметрией.



В конце этого параграфа мы докажем, что любое движение фигуры на плоскости можно представить как последовательность или комбинацию трёх основных движений: параллельного переноса, поворота и симметрии. Например, для того чтобы с их помощью совместить два равных треугольника A и B, показанных на рисунке 10, сначала нужно треугольник A отразить относительно прямой и получить симметричный ему треугольник A_1. Потом параллельным переносом сдвинуть треугольник A_1 до положения треугольника A_2, одна вершина которого совпадает с вершиной треугольника B. И наконец, повернуть треугольник A_2



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

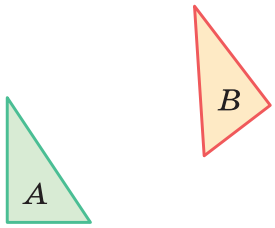


Рис. 10

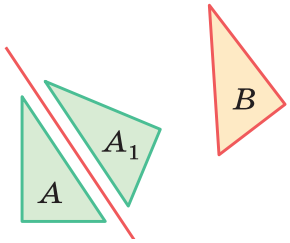


Рис. 11

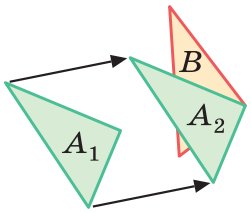


Рис. 12

вокруг этой вершины так, чтобы он совместился с треугольником B (рис. 11 , 12).

Общая теорема о композиции любых движений была доказана в 1830 г. французским геометром Мишелем Шалем и называется *теоремой Шаля*. А сейчас давайте познакомимся с основными видами движений плоскости. И начнём мы с параллельного переноса.

Параллельный перенос



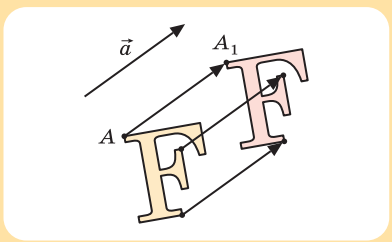
Когда мы передвигаем предметы так, что все их точки перемещаются в одном направлении на одно и то же заданное расстояние, то совершаем параллельный перенос. То же происходит, когда мы прокручиваем текст на экране своего компьютера или мобильного устройства. Давайте запишем это как определение параллельного переноса.

Параллельным переносом фигуры называют такое преобразование, при котором все точки этой фигуры перемещаются в одном направлении на одно и то же расстояние.

Поскольку вектор имеет длину и направление, то параллельный перенос естественно будет определить с помощью вектора переноса.

Параллельным переносом фигуры на вектор $\vec{a}$ называют преобразование, которое каждой точке A этой фигуры ставит в соответствие такую точку A_1, что вектор $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$.

Параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ обозначают так: $P_{\vec{a}}$.



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Здравый смысл подсказывает нам, что параллельный перенос является для нас моделью движения в одном направлении. Давайте проверим, что параллельный перенос — это движение с точки зрения геометрии.

ТЕОРЕМА

Параллельный перенос является движением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть при параллельном переносе на некоторый вектор $\vec{a}$ произвольные точки A и B фигуры перешли в точки A_1 и B_1 (рис. 13). По определению это значит, что векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ должны быть равны вектору $\vec{a}$. Следовательно, отрезки AA_1 и BB_1 должны быть параллельны и равны. Если они не лежат на одной прямой, то четырёхугольник AA_1B_1B будет параллелограммом по признаку. Откуда по свойству параллелограмма следует, что $AB = A_1B_1$. Значит, параллельный перенос сохраняет расстояния между любыми точками A и B фигуры и по определению является движением.

Что и требовалось доказать.

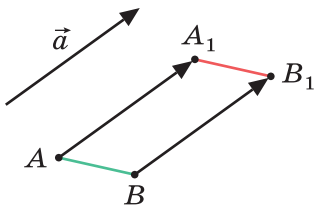


Рис. 13

Случай, когда отрезки AA_1 и BB_1 лежат на одной прямой, разберите самостоятельно.

Кроме того, для параллельного переноса выполняется следующее свойство.

СВОЙСТВО ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА

При параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую или в саму себя.

УПРАЖНЕНИЯ

6. Докажите свойство параллельного переноса.

7. На клетчатой бумаге показаны прямая l и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 14). В какие прямые перейдёт прямая l при параллельном переносе на каждый из этих векторов? Чему будет равно расстояние между этими прямыми, если сторона одной клетки равна 1?

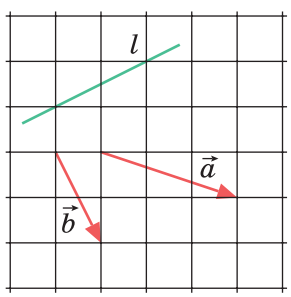


Рис. 14

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

8. Нарисуйте две параллельные прямые. А теперь изобразите три неколлинеарных вектора, параллельный перенос на каждый из которых переводит одну из этих прямых в другую.

9. На клетчатой бумаге показаны окружность и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 15). В какие фигуры перейдёт данная окружность при параллельном переносе на эти векторы? Чему будет равно расстояние между точками пересечения этих фигур, если сторона одной клетки равна 1?

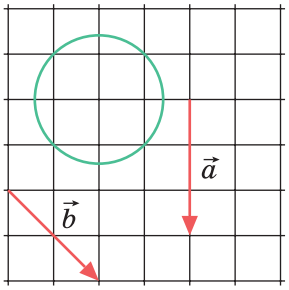


Рис. 15

А теперь давайте посмотрим, как параллельный перенос помогает при решении задач.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1. ★☆☆ Даны две пересекающиеся прямые a и b и отрезок CD, не параллельный этим прямым и расположенный так, как показано на рисунке 16. Постройте параллелограмм $ABCD$, вершины A и B которого лежат соответственно на прямых a и b. Сколько может быть таких параллелограммов?

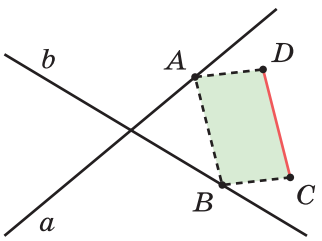


Рис. 16

РЕШЕНИЕ

Анализ задачи

Пусть нужный параллелограмм $ABCD$ уже построен. Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ будет равен вектору $\overrightarrow{DC}$. Сделаем параллельный перенос прямой a на данный вектор $\overrightarrow{DC}$. Тогда прямая a перейдёт в параллельную ей прямую a_1. При этом переносе точка A должна перейти в некоторую точку B на прямой b и одновременно оказаться где-то на прямой a_1 (рис. 17). Значит, точка B может быть только в одном месте — на пересечении прямых b и a_1. По вершинам B, C и D уже легко построить вершину A искомого параллелограмма.

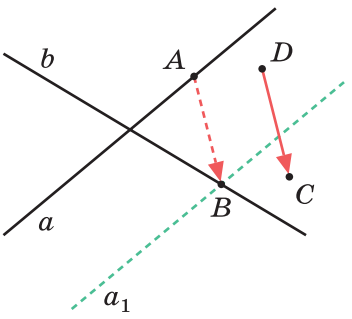


Рис. 17

Построение

1. От произвольной точки N прямой a откладываем вектор $\overrightarrow{NN_1}$, равный вектору $\overrightarrow{DC}$ (рис. 18).

2. Через точку N_1 строим прямую a_1, параллельную прямой a, обозначаем точку пересечения прямых a_1 и b буквой B.

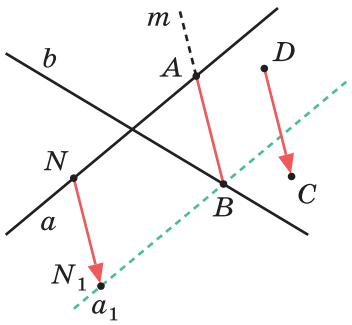


Рис. 18

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

3. Через точку B строим прямую m, параллельную прямой CD, обозначаем точку пересечения прямых m и a буквой A.

4. Проводим отрезки AD и BC, получаем искомый параллелограмм $ABCD$.

Исследование

Прямая a_1 однозначно строится по прямой a и вектору $\overrightarrow{DC}$ и пересекает прямую b в единственной точке B. Прямая m не параллельна прямой a и пересекает её в единственной точке A.

Таким образом, искомый параллелограмм $ABCD$ всегда можно построить единственным образом.

Ответ: у задачи всегда есть ровно одно решение.

ПРИМЕР 2. ★★☆ Населённые пункты A и B находятся по разные стороны реки, берега которой параллельны. В каком месте нужно построить мост через эту реку, чтобы путь от пункта A до пункта B был как можно короче? Мост через реку строят перпендикулярно к её берегам (рис. 19).

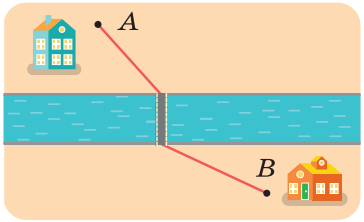


Рис. 19

РЕШЕНИЕ

Обозначим мост через реку отрезком MT. Поскольку берега реки параллельны, а мост им перпендикулярен, то он всегда будет иметь одну и ту же длину и направление, то есть вектор $\overrightarrow{MT}$ будет одним и тем же для любого моста (рис. 20). По пути из пункта A в пункт B обязательно нужно пройти мост, поэтому длина всего пути будет наименьшей, когда наименьшей будет сумма отрезков AM и BT. Сложность задачи состоит в том, что два эти отрезка дороги находятся по разные стороны реки, в двух полуплоскостях, не имеющих общей границы.

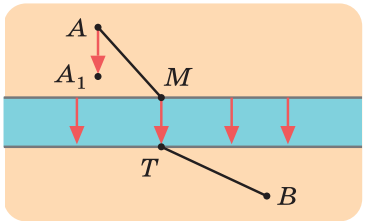


Рис. 20

С помощью параллельного переноса попробуем совместить концы этих отрезков. Перенесём всю полуплоскость, в которой лежит точка A, на вектор моста $\overrightarrow{MT}$. Можно сказать, что с помощью такого переноса мысленно мы совместим два берега реки и тем самым «уберём» эту реку. Точка A при этом перейдёт в некоторую точку A_1, точка M — в точку T, а отрезок AM перейдёт в равный ему отрезок A_1T (рис. 21).

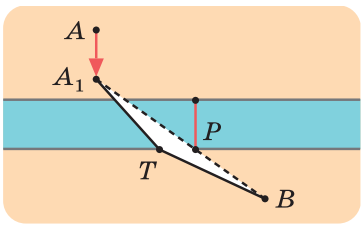


Рис. 21

Тогда по неравенству треугольника можно записать, что $AM + BT = A_1T + TB \geqslant A_1B$.

Это значит, что сумма $AM + TB$ будет наименьшей, когда точка T лежит на отрезке A_1B. Поэтому длина всей дороги от A до B будет наименьшей, если мост построить в точке P пересечения отрезка A_1B с ближайшим к точке B берегом реки (рис. 22).

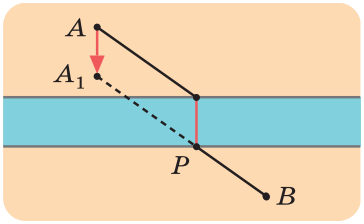


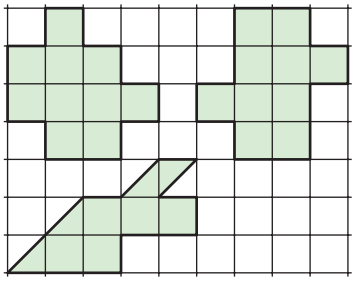
Рис. 22

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

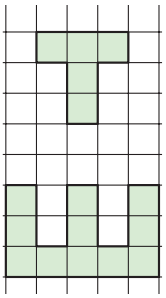




задача 4



задача 7



задача 8

ЗАДАЧИ

1. ★☆☆ Докажите, что последовательное применение (композиция) двух параллельных переносов тоже является параллельным переносом.

2. ★☆☆ Некоторое преобразование каждой точке плоскости с координатами $(x; y)$ ставит в соответствие точку с координатами $(x - 3; y + 4)$. Докажите, что это преобразование является параллельным переносом. Найдите модуль вектора этого переноса.

3. ★☆☆ Даны окружность и отрезок AB. Постройте параллелограмм $ABCD$, вершины C и D которого лежат на данной окружности. Сколько можно построить таких параллелограммов?

4. ★☆☆ На рисунках показаны так называемые периодические замощения плоскости одинаковыми плитками. Укажите три различных вектора, при параллельном переносе на которые каждое из таких замощений совпадает само с собой. Сколько всего может быть таких векторов? (задача 4 рис.)

5. ★☆☆ Две деревни находятся на разных берегах реки: расстояние от одной из них до реки равно 300 м, а от другой — 500 м. Расстояние между деревнями вдоль берега реки равно 1,5 км. Найдите длину самой короткой дороги между этими деревнями, если она проходит через мост длиной 200 м.

6. ★☆☆ Даны окружность, прямая и отрезок AB. Постройте параллелограмм $ABCD$, вершина C которого лежит на окружности, а вершина D — на данной прямой. Сколько решений может иметь задача?

7. ★☆☆ Разрежьте каждую из фигур, показанных на клетчатой бумаге, на две фигуры, которые можно совместить параллельным переносом. (задача 7 рис.)

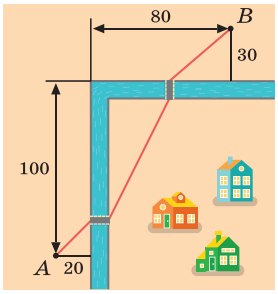
8. ★★☆ Покажите, как можно замостить всю плоскость одинаковыми плитками в виде букв Т или же плитками в виде букв Ш, которые показаны на рисунке. Покажите на своём рисунке вектор параллельного переноса, при котором такое замощение переходит само в себя. (задача 8 рис.)

9. ★★☆ Даны две окружности различных радиусов и прямая l. Постройте прямую, параллельную l, которая высекает на данных окружностях равные хорды.

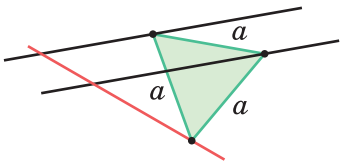
10. ★★☆ Канал шириной 10 м делает поворот под прямым углом. Найдите самую короткую дорогу между точками A и B, показанными на рисунке, если она проходит по мостам через оба рукава этого канала. (рис.)

11. ★★★ Докажите, что из всех четырёхугольников с данными диагоналями и углом между ними наименьший периметр имеет параллелограмм.

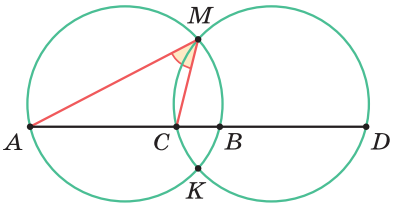
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 10



задача 12



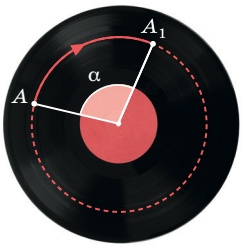
задача 13

12. ★★★ Даны три прямые, две из которых параллельны, и отрезок. Постройте равносторонний треугольник, вершины которого лежали бы по одной на трёх данных прямых, а стороны равнялись бы данному отрезку. (▸▸ рис.)

13. ★★★ Прямая, перпендикулярная общей хорде MK двух равных окружностей, пересекает первую из них в точках A и B, а вторую — в точках C и D, причём точка C лежит на отрезке AB. Докажите, что величина угла AMC не зависит от выбора этой прямой. (▸▸ рис.)

Поворот





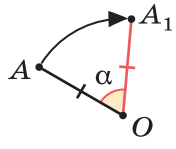


С поворотами в жизни мы встречаемся постоянно: мы поворачиваем голову, руль автомобиля, ключ в дверном замке, ручку двери. Колесо совершает поворот вокруг своего центра, так же кружится пластинка граммофона или стрелки часов. А что означает поворот с точки зрения геометрии? Если плоская фигура поворачивается вокруг одной точки, то все другие её точки движутся по окружностям с общим центром. Этот центр называют центром поворота. Остальные точки фигуры относительно него движутся синхронно: в каждый момент времени все они поворачиваются на одинаковый угол.

Любой из вас знает: повернуть руль из данного положения можно вправо или влево, то есть для поворота всегда есть две возможности. Люди давно договорились направление поворота связывать с движением стрелок часов. Винты и гайки, вентили на кранах, крышки банок и бутылок завинчивают по часовой стрелке, а открывают их, наоборот, против часовой стрелки. Давайте теперь дадим определение поворота как геометрического преобразования.

Поворотом фигуры (или плоскости) вокруг данной точки O на угол α называется преобразование, при котором каждой точке A фигуры ставится в соответствие точка A_1 такая, что $A_1O = AO$ и угол между лучами OA и OA_1 равен α.

Поворот R_O^α



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Точка O называется **центром поворота**, а угол α — **углом поворота***. Поворот обозначают так: R_O^α.

Давайте проверим, что поворот вокруг точки является геометрическим движением, то есть преобразованием, которое сохраняет расстояния между точками.

ТЕОРЕМА

Поворот является движением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть при повороте вокруг точки O на угол α точки A и B перешли соответственно в точки A_1 и B_1 (рис. 23). По определению поворота тогда $OA = OA_1$, $OB = OB_1$ и углы AOA_1 и BOB_1 равны α. Рассмотрим случай, когда точки A, B и O не лежат на одной прямой. Тогда угол AOB будет равен углу A_1OB_1 (подумайте почему). Значит, треугольники AOB и A_1OB_1 будут равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $AB = A_1B_1$. То есть расстояние между двумя любыми точками A и B равно расстоянию между их образами A_1 и B_1 при повороте. Значит, поворот — движение.

Что и требовалось доказать.

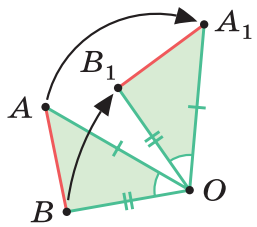


Рис. 23

Случай, когда точки A, B и O лежат на одной прямой, разберите самостоятельно.

Поскольку поворот — это движение плоскости, то прямую он преобразует в прямую. Ясно, что при этом прямая тоже должна поворачиваться вокруг центра поворота. Как же построить образ прямой a при повороте вокруг точки O на данный угол α? Опустим из точки O на прямую a перпендикуляр OH. Потом повернём отрезок OH на нужный угол α и получим отрезок OH_1 (рис. 24). Теперь построим через точку H_1 прямую a_1, перпендикулярную отрезку OH_1. Эта прямая и будет образом прямой a при данном повороте.

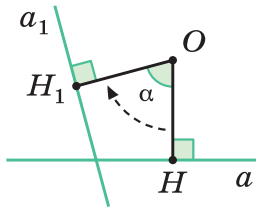


Рис. 24

* Угол поворота считают меньшим 360° и положительным, если плоскость поворачивают против часовой стрелки, отрицательным же он будет, когда поворот совершается по часовой стрелке.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

УПРАЖНЕНИЯ

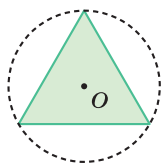
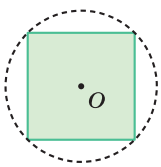
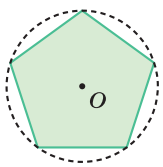
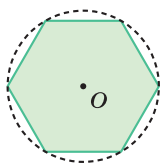
Некоторая фигура переходит сама в себя при повороте на 48 градусов. Будет ли она переходить в себя при повороте на 72 градуса?

10. Объясните, почему с помощью приведённого метода действительно получается образ данной прямой a при повороте вокруг точки O на угол α.

11. Пусть при повороте вокруг точки O на угол α прямая a перешла в прямую a_1. Обозначим буквой φ наименьший из углов между прямыми a и a_1. Сделайте чертёж и найдите значение угла φ для различных углов α поворота. Заполните соответствующую таблицу.

α	$\alpha < 90°$	$\alpha = 90°$	$90° < \alpha < 180°$	$\alpha = 180°$	$180° < \alpha < 270°$	$270° < \alpha < 360°$
φ	α					

12. В таблице показаны правильные многоугольники. В каждом из них отмечен центр O описанной около него окружности. Перерисуйте таблицу в тетрадь и запишите значения углов $\alpha < 360°$, при повороте на которые вокруг точки O этот многоугольник переходит сам в себя.

				
α				

13. На клетчатой бумаге показаны треугольник и точка O (рис. 25). Перерисуйте их в свою тетрадь и постройте в ней образ этого треугольника при повороте вокруг точки O на $90°$ по часовой стрелке.

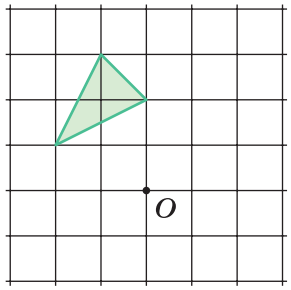


Рис. 25

14. На клетчатой бумаге показаны точка T и окружность ω (рис. 26). Перерисуйте их в свою тетрадь и постройте образ ω_1 данной окружности при повороте вокруг точки T на угол $90°$ по часовой стрелке. Найдите длину общей хорды окружностей ω и ω_1, если сторона одной клетки равна 1.

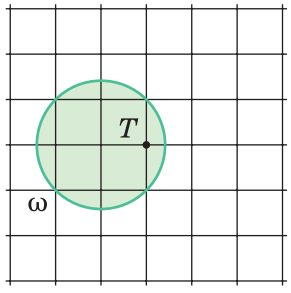


Рис. 26

15. На клетчатой бумаге показаны точка M и окружность ω (рис. 27). Перерисуйте их в свою тетрадь и постройте образ ω_1 данной окружности при повороте вокруг точки M на угол $90°$ против часовой стрелки. Найдите длину общей внутренней касательной к окружностям ω и ω_1, если сторона одной клетки равна 1.

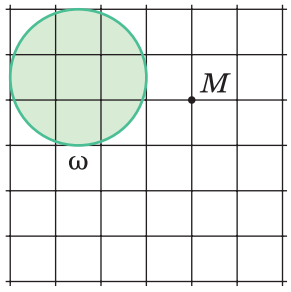


Рис. 27

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

16. На клетчатой бумаге показаны равные отрезки AB и CD (рис. 28, 29). Перерисуйте их в свою тетрадь и укажите центр поворота, при котором: а) точка A переходит в точку C, а точка B — в точку D; б) точка A переходит в точку D, а точка B — в точку C.

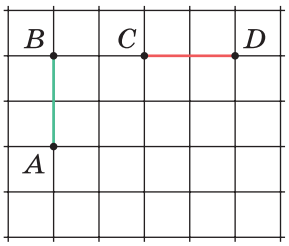


Рис. 28

17. Разрежьте равносторонний треугольник на три а) четырёхугольника; б) пятиугольника так, чтобы каждый из них переходил в другой при повороте на 120°.

18. Разрежьте квадрат на четыре равных шестиугольника, чтобы каждый из них переходил в другой при повороте на 90°.

19. Разрежьте фигуру на клетчатой бумаге на две части, которые можно совместить поворотом (рис. 30). Вокруг какой точки и на какой угол должен быть произведён этот поворот?

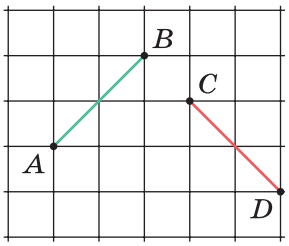
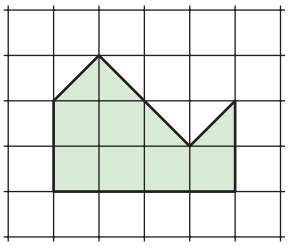


Рис. 29

Давайте теперь посмотрим, как поворот помогает при решении задач.


Рис. 30

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 3. ★☆☆ Квадрат со стороной 1 повернули вокруг его вершины на угол 45° (рис. 31). С точностью до 0,01 найдите площадь общей части исходного и повёрнутого квадратов.

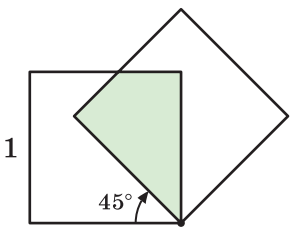


Рис. 31

РЕШЕНИЕ.

Пусть квадрат $ABCD$ повернули вокруг его вершины D на угол 45°. Тогда его вершина A перейдёт в точку A_1, лежащую на диагонали AD, а вершина B — в точку B_1. Обозначим точку пересечения отрезков A_1B_1 и BC буквой E. Общая часть исходного и повёрнутого квадратов представляет собой четырёхугольник DA_1EC (рис. 32).

Заметим, что треугольники DCE и DA_1E равны по гипотенузе и катету, поэтому равны отрезки EA_1 и EC. Обозначим их длину за x. Треугольник BA_1E — равнобедренный, поэтому длина отрезка A_1B тоже равна x. Значит, длина диагонали BD квадрата равна $1 + x$. Следовательно, можно составить уравнение $1 + x = \sqrt{2}$. Откуда $x = \sqrt{2} - 1$.

Площадь общей части двух квадратов в два раза больше площади прямоугольного треугольника CED и равна $x = \sqrt{2} - 1 \approx 1{,}41 - 1 = 0{,}41$.

Ответ: 0,41.

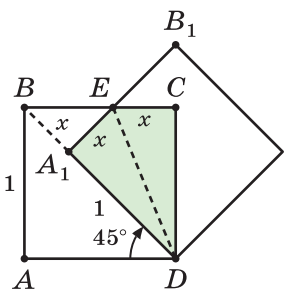


Рис. 32

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ПРИМЕР 4. ★★☆ Даны прямые a и b и точка O, не принадлежащая этим прямым. Постройте равносторонний треугольник OAB, вершины A и B которого лежат соответственно на прямых a и b (рис. 33).

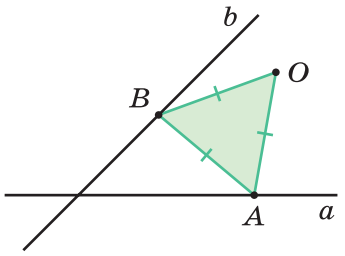


Рис. 33

РЕШЕНИЕ

Анализ задачи

Пусть искомый равносторонний треугольник AOB построен. Поскольку $OA = OB$ и угол AOB равен 60°, то при повороте вокруг точки O на 60° по часовой стрелке (либо против неё) точка A перейдёт в точку B (рис. 34). Предположим, что прямая a при таком повороте перейдёт в прямую a_1. Поскольку точка A принадлежит прямой a, то её образ должен находиться на прямой a_1. Значит, точка B может быть только на пересечении прямых a_1 и b. По вершине B легко построить вершину A, если повернуть точку B относительно центра O на угол 60° против часовой стрелки (а во втором случае — против неё).

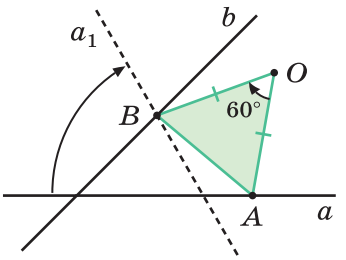


Рис. 34

Построение

1. Из точки O на прямую a опускаем перпендикуляр OH (рис. 35).

2. От луча OH откладываем угол 60° по часовой стрелке и откладываем на нём такую точку H_1, что $OH_1 = OH$.

3. Через точку H_1 перпендикулярно отрезку OH_1 строим прямую a_1. Точку пересечения прямых a_1 и b обозначаем буквой B.

4. На отрезке OB строим равносторонний треугольник OAB в ту же полуплоскость, где лежит точка H. Треугольник OAB искомый.

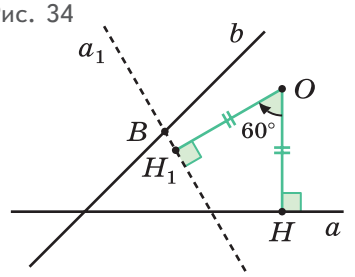


Рис. 35

Исследование

Поскольку повернуть прямую a относительно точки O на 60° можно либо по часовой стрелке, либо против неё, то задача в общем случае имеет 2 решения (второе решение с прямой a_2 показано на рисунке 36. Задача может иметь и только одно решение в случае, когда одна из прямых a_1 или a_2 окажется параллельна прямой b. Подумайте, чему равен угол между прямыми a и b в этом случае.

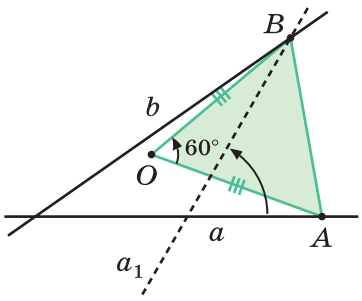


Рис. 36

ПРИМЕР 5. ★★☆ Точки M и N — середины сторон AB и BC правильного шестиугольника $ABCDEF$. Найдите угол между прямыми EM и FN (рис. 37).

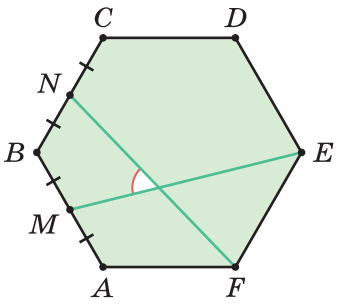


Рис. 37

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

РЕШЕНИЕ

Отметим центр O окружности, описанной около шестиугольника, и проведём радиусы во все его вершины (рис. 38). Они разобьют весь шестиугольник на шесть равносторонних треугольников (вспомните почему).

Рассмотрим поворот всего шестиугольника вокруг точки O на угол 60° по часовой стрелке. Тогда его вершина A перейдёт в вершину B, вершина B — в вершину C и т. д., а вершина E перейдёт в вершину F. При этом сторона AB перейдёт в сторону BC, а середина этой стороны — в середину BC. Значит, точка M при таком повороте перейдёт в точку N (рис. 39).

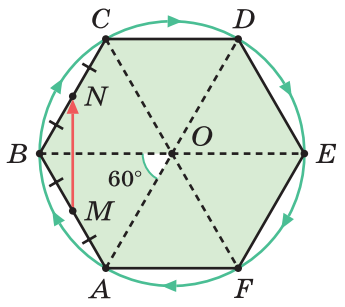


Рис. 38

Таким образом, при повороте на 60° вокруг центра O прямая EM перейдёт в прямую FN. Поэтому угол между этими прямыми будет равен углу поворота, то есть он равен 60°.

Ответ: 60°.

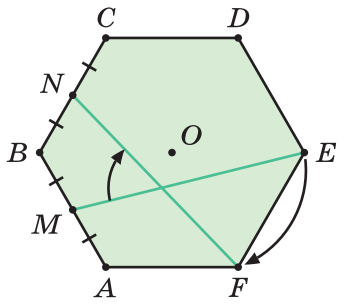


Рис. 39

ПРИМЕР 6. ★★★ Точки K и M — середина стороны BC и середина диагонали DF правильного шестиугольника $ABCDEF$. Докажите, что AMK — равносторонний треугольник (рис. 40).

РЕШЕНИЕ

Отметим точку O — центр шестиугольника и точку T пересечения прямых AB и CD (рис. 41). Треугольники AOF и ATD будут равносторонними (проверьте это).

Сделаем поворот вокруг точки A на 60° против часовой стрелки: тогда точка F перейдёт в точку O, а точка D — в точку T. Значит, отрезок FD при таком повороте перейдёт в отрезок OT, а точка M — в середину отрезка OT. Но середина отрезка OT совпадёт с точкой K, поскольку четырёхугольник $OBTC$ является ромбом (докажите это).

Таким образом, при повороте вокруг точки A на 60° точка M перейдёт в точку K.

Значит, $AM = AK$ и треугольник AKM равнобедренный с углом 60° при вершине A. Следовательно, этот треугольник равносторонний.

Что и требовалось доказать.

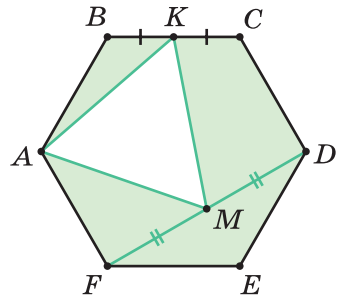


Рис. 40

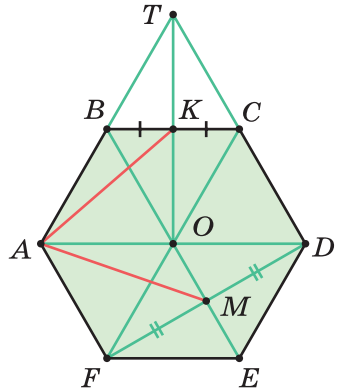
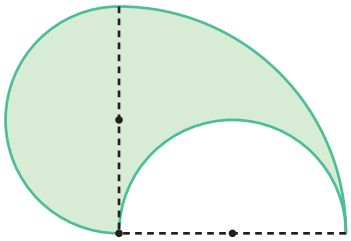


Рис. 41

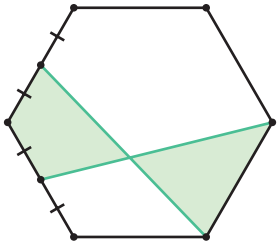
ЗАДАЧИ

14. ★☆☆ Фигура, изображённая на рисунке, образована дугами трёх окружностей. Разрежьте эту фигуру на две равные части. Каким движением их можно совместить? Можно ли эту фигуру разрезать на три равные части? (⏩ рис.)

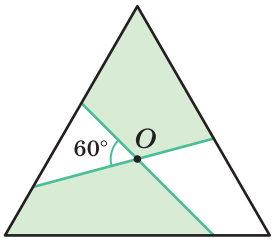
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 14



задача 23



задача 24

15. ★☆☆ Квадрат со стороной 1 повернули вокруг его вершины на угол 30°. Найдите площадь общей части исходного и повёрнутого квадратов.

16. ★☆☆ Равносторонний треугольник, площадь которого равна 6, повернули вокруг середины его стороны на угол 60°. Найдите площадь общей части исходного и повёрнутого треугольников.

17. ★☆☆ Окружность радиуса 1 повернули вокруг одной её точки на угол а) 60°; б) 90°; в) 120°. Найдите длину общей хорды исходной и повёрнутой окружностей в каждом случае.

18. ★☆☆ Равносторонний треугольник со стороной 1 повернули вокруг его вершины на угол 30°. Найдите площадь общей части исходного и повёрнутого треугольников.

19. ★☆☆ Квадрат со стороной 1 повернули вокруг середины его стороны на угол: а) 60°; б) 120°. Найдите площадь общей части исходного и повёрнутого квадратов в каждом случае.

20. ★☆☆ Равносторонний треугольник повернули вокруг середины одной его стороны на угол 90°. Найдите отношение, в котором делятся точкой пересечения другие стороны исходного и повёрнутого треугольников.

21. ★☆☆ Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого находится в данной точке, а две другие — на двух данных окружностях. Сколько может быть таких треугольников?

22. ★☆☆ Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого находится в данной точке, а две другие — на данных прямой и окружности. Сколько может быть таких треугольников?

23. ★☆☆ Две вершины правильного шестиугольника соединили отрезками с серединами двух его сторон так, как это показано на рисунке. Докажите, что площади закрашенных треугольника и четырёхугольника равны. (▸▸ рис.)

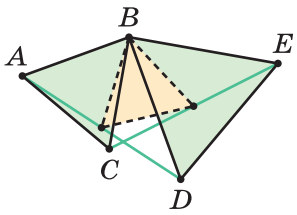
24. ★☆☆ Через центр правильного треугольника провели две прямые, угол между которыми равен 60°. Докажите, что закрашенные на рисунке четырёхугольники имеют равные площади. (▸▸ рис.)

25. ★☆☆ Через центр правильного пятиугольника провели две прямые, угол между которыми равен 72°. Докажите, что отрезки этих прямых, заключённые внутри пятиугольника, равны.

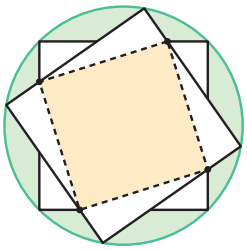
26. ★★☆ Постройте квадрат, если даны его центр и по одной точке на двух смежных сторонах.

27. ★★☆ Два равносторонних треугольника ABC и BED расположены так, как показано на рисунке. Докажите,

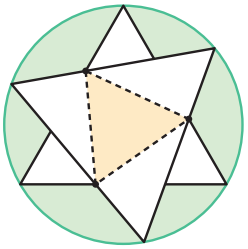
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 27



задача 28



задача 29

что точка B и середины отрезков AD и CE являются вершинами равностороннего треугольника. (рис.)

28. ★★☆ Два квадрата вписаны в одну окружность. Докажите, что точки пересечения их сторон, взятые через одну, являются вершинами третьего квадрата. (рис.)

29. ★★☆ Два правильных треугольника вписаны в одну окружность. Докажите, что точки пересечения их сторон, взятые через одну, являются вершинами правильного треугольника. (рис.)

30. ★★☆ Постройте квадрат, две соседние вершины которого лежат на данной окружности, а диагонали пересекаются в точке T. Сколько клеток составляет площадь этого квадрата? (рис.)

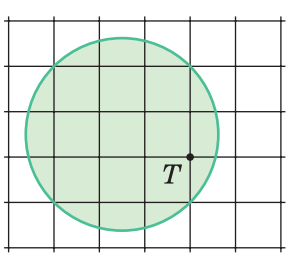
31. ★★☆ Сектор, составляющий четвёртую часть круга радиуса 1, повернули вокруг конца его дуги на 45°. Найдите площадь общей части исходного и повёрнутого секторов. (рис.)

32. ★★☆ Фигура, изображённая на рисунке, образована дугой окружности и ломаной, все соседние звенья которой равны и перпендикулярны. Разрежьте эту фигуру на две равные части. Можно ли такую фигуру разрезать на три равные части? (рис.)

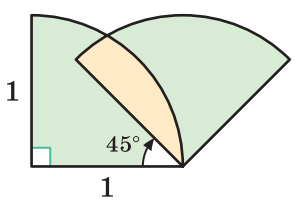
33. ★★☆ Внутри квадрата $ABCD$ взяли произвольную точку O. Через точку A провели прямую перпендикулярно OB, через B — перпендикулярно OC, и т. д. Докажите, что четыре полученные прямые пересекаются в одной точке. (рис.)

34. ★★☆ Даны две окружности с общим центром. Постройте квадрат так, чтобы две соседние его вершины лежали на одной окружности, а две оставшиеся — на другой. (рис.)

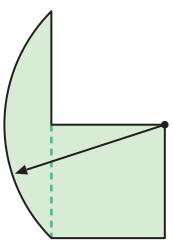
35. ★★☆ Даны три окружности с общим центром. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы на каждой окружности лежала единственная вершина треугольника. (рис.)



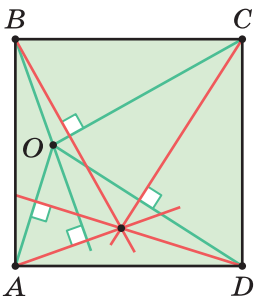
задача 30



задача 31

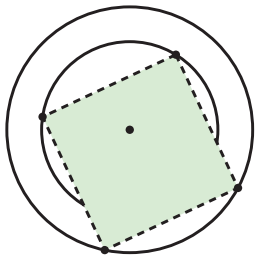


задача 32

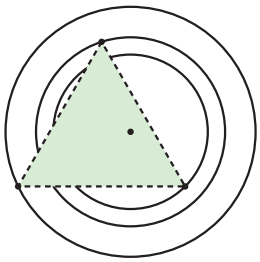


задача 33

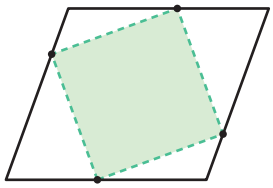
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 34



задача 35



задача 37

36. ★★☆ Даны 3 параллельные прямые. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы на каждой прямой лежала единственная вершина треугольника.

37. ★★☆ В данный параллелограмм впишите квадрат так, чтобы все его вершины лежали на разных сторонах параллелограмма. (▸▸ рис.)

38. ★★★ На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построили квадраты $ABEF$ и $CBDK$. Докажите, что медиана BM треугольника EBD в два раза меньше стороны AC и перпендикулярна ей.

39. ★★★ Точка N — середина стороны AC треугольника ABC. На его сторонах AB и BC взяли соответственно точки M и K так, что треугольник MKN — равносторонний. Известно, что $AM : MB = 15 : 17$. Найдите $BK : KC$, если угол BAC равен 60°.

Центральная симметрия

Частный случай поворота называют **центральной симметрией**. Она возникает, когда угол поворота равен 180°. И в этом случае не имеет значения, в какую сторону совершается такой поворот. Образно можно сказать, что центральная симметрия — это как будто прыжок через данную точку на такое же расстояние (рис. 42). А теперь запишем строгое определение.

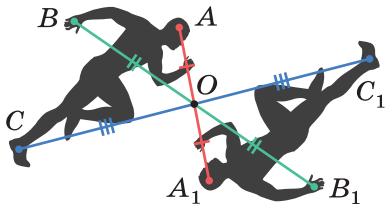
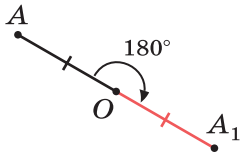


Рис. 42

Центральной симметрией или симметрией относительно точки O называется преобразование плоскости, которое каждой точке A ставит в соответствие точку A_1 так, что точка O является серединой отрезка AA_1.

Точка O называется **центром симметрии**, а сама симметрия обозначается так: Z_O.



Центральная симметрия Z_O

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Поскольку центральная симметрия — это поворот, то она является движением. Фигуру называют центрально-симметричной, если при симметрии относительно некоторой точки эта фигура переходит сама в себя.

УПРАЖНЕНИЯ

20. Какая из перечисленных фигур имеет центр симметрии: отрезок, луч, прямая, угол, окружность?

21. Напишите три двузначных числа, десятичная запись которых имеет центр симметрии. Существуют ли такие трёхзначные числа?

22. Какая фигура должна быть следующей в данном ряду (рис. 43)?



Рис. 43

23. Какие координаты имеет точка, симметричная точке $A(x; y)$ относительно начала координат?

24. С помощью одного циркуля постройте точку, симметричную данной точке A относительно точки O.

25. Докажите, что при центральной симметрии прямая переходит в параллельную прямую либо в саму себя.

26. Докажите, что любой параллелограмм имеет центр симметрии.

27. Даны прямая и точка, не лежащая на этой прямой. Постройте прямую, симметричную данной прямой относительно данной точки.

28. Нарисуйте: а) четырёхугольник; б) шестиугольник; в) восьмиугольник, имеющие центр симметрии.

29. Может ли пятиугольник иметь центр симметрии?

30. Разрежьте прямоугольную пластину с круглой дыркой прямой линией на две части равной площади (рис. 44).

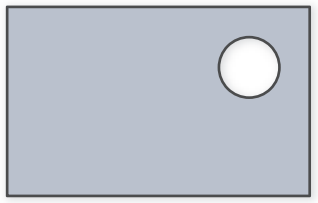


Рис. 44

31. На прямоугольный ломоть хлеба произвольно положили квадратный ломтик сыра. Как разрезать полученный бутерброд на две части, чтобы в них было поровну и хлеба, и сыра?

32. Как одной прямой разрезать уголок, показанный на рисунке, на две равновеликие части (рис. 45)?

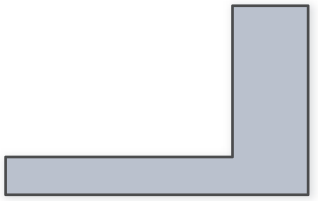


Рис. 45

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

А теперь посмотрим, как центральная симметрия помогает при решении задач.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 7. ★☆☆ Даны параллелограмм $ABCD$ и произвольная точка M. Через вершины A, B, C и D проводят прямые, параллельные соответственно прямым MC, MD, MA и MB (рис. 46). Докажите, что проведённые прямые пересекаются в одной точке.

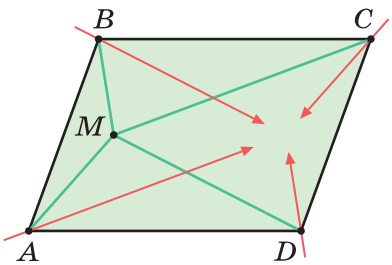


Рис. 46

РЕШЕНИЕ

Отметим точку O пересечения диагоналей параллелограмма — она будет центром его симметрии (рис. 47). Рассмотрим симметрию относительно точки O: точка A при этом перейдёт в точку C, точка M — в точку M_1, а прямая AM по свойству центральной симметрии должна перейти в параллельную ей прямую. Значит, точка M_1 лежит на прямой, проходящей через вершину C и параллельной AM. Так же можно доказать, что точка M_1 лежит на прямой, проходящей через вершину B параллельно DM и на двух других аналогичных прямых, проходящих через вершины C и D параллелограмма. Значит, все эти четыре прямые пересекаются в одной точке M_1.

Что и требовалось доказать.

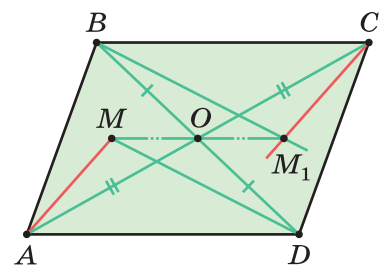


Рис. 47

ПРИМЕР 8. ★★☆ Даны угол и точка O внутри этого угла. Проведите прямую через данную точку так, чтобы она отсекала от этого угла треугольник наименьшей площади (рис. 48).

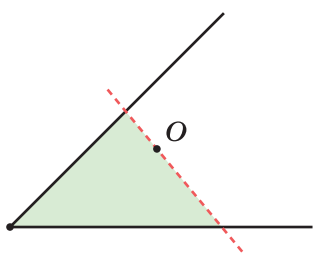


Рис. 48

РЕШЕНИЕ

Пусть через точку O, которая лежит внутри угла с вершиной C, проведена произвольная прямая, пересекающая стороны угла в точках A и B. Рассмотрим симметрию с центром в точке O. При этом точка C перейдёт в точку C_1, а стороны угла — в параллельные им прямые a и b, проходящие через точку C_1 (рис. 49). Точка O тогда окажется центром симметрии параллелограмма, который прямые a и b будут отсекать от данного угла. Назовём этот параллелограмм центральным.

Треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC симметричны относительно точки O, поэтому они равны. Как бы мы ни проводили прямую AB через точку O, эти два треугольника всегда

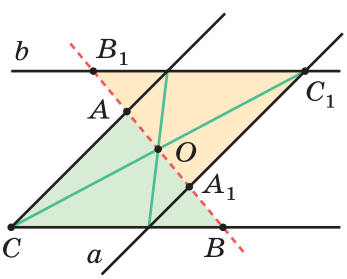


Рис. 49

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

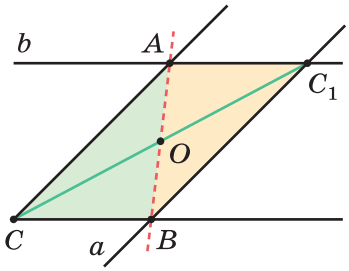


Рис. 50

будут покрывать центральный параллелограмм, следовательно, сумма их площадей не может быть меньше площади такого параллелограмма. Значит, площадь отсечённого треугольника ABC всегда больше или равна половине площади центрального параллелограмма. А наименьшей его площадь будет в случае, когда точки A и B совпадут с вершинами центрального параллелограмма (рис. 50). Тогда точка O будет делить отрезок AB пополам.

Ответ: искомая прямая пересекает стороны угла в точках A и B, симметричных относительно данной точки O.

ЗАДАЧИ

40. ★☆☆ Через данную точку M проведите прямую так, чтобы её отрезок с концами на данной прямой и данной окружности делился бы точкой M пополам. Сколько может быть таких прямых? (⏩ рис.)

41. ★☆☆ Через данную точку M проведите прямую так, чтобы её отрезок с концами на двух данных окружностях делился точкой M пополам. Сколько может быть таких прямых? (⏩ рис.)

42. ★☆☆ Две различные окружности имеют один центр. Через данную точку на одной из них проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней три равных отрезка. (⏩ рис.)

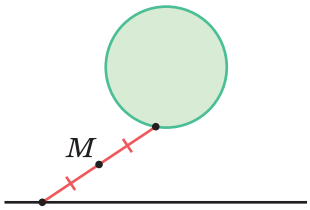
43. ★☆☆ На каждой стороне параллелограмма построили правильный треугольник: а) вне параллелограмма; б) в той же полуплоскости, где лежит этот параллелограмм. Докажите, что четырёхугольник с вершинами в центрах всех построенных треугольников является параллелограммом.

44. ★★☆ На каждой стороне одного параллелограмма лежит единственная вершина другого параллелограмма. Докажите, что центры этих параллелограммов совпадают.

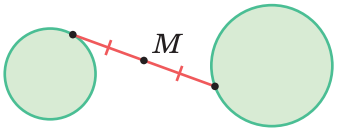
45. ★★☆ Докажите, что последовательное применение двух центральных симметрий относительно двух различных точек является параллельным переносом.

46. ★★☆ Точка O — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На его катетах AC и BC выбрали такие точки M и K, что $\angle MOK = 90°$. Докажите, что $MK^2 = AM^2 + BK^2$. (⏩ рис.)

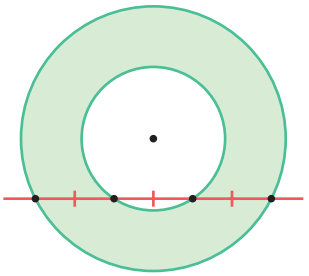
47. ★★☆ На окружности даны четыре точки. Через середину каждого отрезка, соединяющего любые две из них, проводят перпендикуляр к прямой, проходящей через две другие точки. Докажите, что построенные так шесть перпендикуляров пересекаются в одной точке. (⏩ рис.)



⏩ задача 40

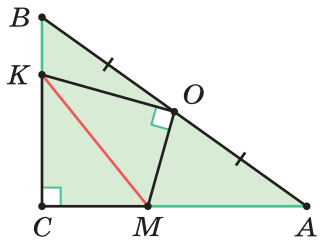


⏩ задача 41

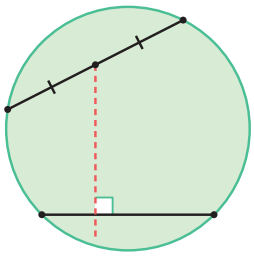


⏩ задача 42

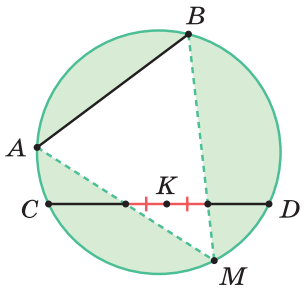
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 46



задача 47



задача 49

48. ★★☆ Через данную точку внутри круга проведите хорду, которая отсекает от него сегмент наименьшей площади.

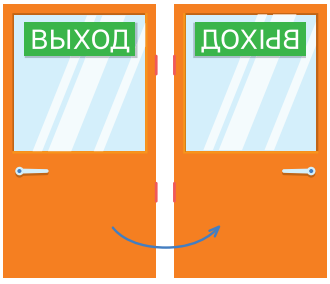
49. ★★★ На окружности даны две произвольные хорды AB и CD, на хорде CD взяли произвольную точку K. Постройте на окружности такую точку M, чтобы прямые AM и BM высекали на хорде CD отрезок, который бы делился точкой K пополам. (▸▸ рис.)

50. ★★★ Может ли ограниченная фигура на плоскости иметь два центра симметрии?

51. ★★★ Докажите, что график функции $y = x^3 + px^2 + qx + r$ имеет центр симметрии.

52. ★★★ Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точки H_1, H_2, H_3 и H_4 являются ортоцентрами треугольников ABC, BCD, ACD и ABD соответственно. Докажите, что четырёхугольник $H_1H_2H_3H_4$ симметричен четырёхугольнику $ABCD$ относительно некоторой точки.

Осевая симметрия



Осевая симметрия переворачивает надписи

С осевой симметрией мы встречаемся, когда смотрим в плоское зеркало и на отражение в глади спокойной воды. А если на прозрачном стекле мы напишем какое-нибудь слово и потом посмотрим на него с другой стороны этого стекла, то написанное нами слово обязательно будет перевёрнуто. Такое преобразование совершает с ним симметрия относительно плоскости этого стекла. То же самое происходит, когда вы подносите к зеркалу надпись, сделанную на листе бумаги. Поэтому образно можно сказать, что симметрия переворачивает плоские фигуры на другую сторону.

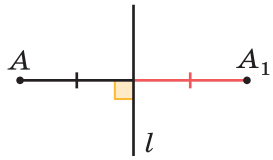


Приведённые нами примеры связаны с симметрией относительно плоскости в пространстве. А на самой плоскости «младшей сестрой» этой симметрии служит симметрия относительно прямой линии. Такую симметрию относительно прямой (или оси) называют осевой симметрией. С ней вы познакомились ещё в 7 классе, когда изучали равнобедренный треугольник. А сейчас давайте напомним её определение.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Осевой симметрией или симметрией относительно прямой l называется преобразование плоскости, которое каждой точке A ставит в соответствие такую точку A_1, что для отрезка AA_1 данная прямая l является серединным перпендикуляром.

Прямая l называется **осью симметрии**, все её точки при симметрии переходят сами в себя. Осевая симметрия обозначается так: S_l.



Осевая симметрия S_l

Осевая симметрия тоже является видом движения, но она отличается от поворота и параллельного переноса тем, что для совмещения двух симметричных фигур на плоскости одну из них нужно мысленно перевернуть другой стороной. А чтобы совершить такой переворот физически, нужно выйти из этой плоскости в пространство. Например, как вы совместите две симметричные фигуры, показанные на рисунке 51, не покидая плоскости этой страницы?

Конечно, симметричные фигуры существуют и в трёхмерном пространстве. Но совместить их там физически уже невозможно — для этого пришлось бы выйти в четвёртое измерение. Поэтому никому не удастся физически совместить правый и левый ботинки или обе свои руки. Сделать это можно только мысленно.

Среди всех движений осевая симметрия играет особую роль: все другие движения на плоскости можно представить как последовательное применение не более чем трёх осевых симметрий. Например, поворот или параллельный перенос являются композицией всего двух таких симметрий. Об этом вы можете прочитать в конце параграфа. А сейчас давайте докажем, что симметрия относительно прямой является движением.

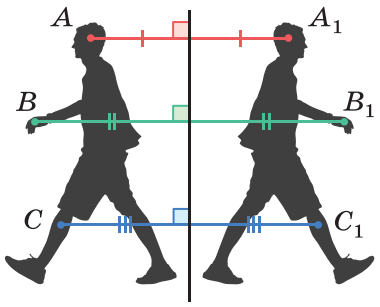


Рис. 51



ТЕОРЕМА

Осевая симметрия является движением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть при симметрии относительно прямой l точки A и B переходят в точки A_1 и B_1 (рис. 52). Сначала мы рассмотрим случай, когда точки A и B лежат по одну сторону от оси симметрии l. Обозначим середины отрезков AA_1 и BB_1 буквами M и K.

Поскольку треугольники BMK и B_1MK равны по двум катетам, то $BM = B_1M$ и угол BMK равен углу B_1MK. Обо-

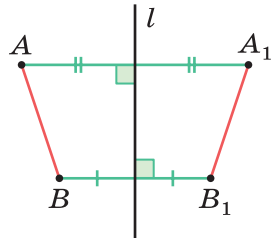


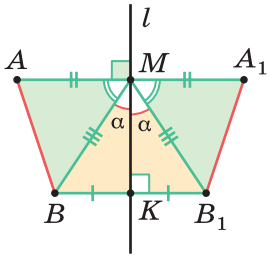
Рис. 52

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

значим их величину как α (рис. 53). Тогда углы AMB и A_1MB_1 будут равны $90° - \alpha$. Следовательно, треугольник AMB будет равен треугольнику A_1MB_1 по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $AB = A_1B_1$, то есть симметрия сохраняет расстояние между точками и является движением.

Случай, когда точки A и B лежат по разные стороны от прямой l, доказывается аналогично. Разберите его самостоятельно.

Что и требовалось доказать.



УПРАЖНЕНИЯ

33. Докажите, что осевая симметрия сохраняет расстояние между точками A и B, расположенными по разные стороны от оси симметрии l (рис. 54).

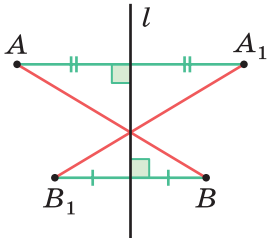


Рис. 54

34. Точки A и B на клетчатой бумаге симметричны относительно некоторой прямой (рис. 55). Постройте эту прямую.

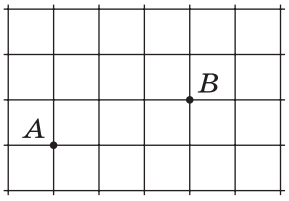


Рис. 55

35. Объясните, зачем на машинах скорой помощи так пишут слово РЕАНИМАЦИЯ (рис. 56).

36. Напишите на листе бумаги печатными буквами слова КОФЕ и ЧАЙ. А теперь переверните этот листок и посмотрите, как они просвечивают сквозь бумагу. Какое из двух написанных вами слов при этом не изменится?

37. При сложении листа бумаги на нём тоже возникает симметрия относительно линии сгиба. Для того чтобы получить снежинку, лист бумаги сложили несколько раз, вырезали из него треугольник с узором и потом развернули его обратно (рис. 57). Сколько раз при этом складывали бумагу?

38. Спокойная поверхность воды отражает окружающие предметы не хуже зеркала. Догадайтесь, что на приведённой фотографии: оригинал или его отражение (рис. 58).



Рис. 56



Рис. 57



Рис. 58

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Говорят, что фигура имеет ось симметрии, если при симметрии относительно некоторой прямой эта фигура переходит сама в себя. Например, прямоугольник имеет две оси симметрии, правильный треугольник — три таких оси, а квадрат — целых четыре.

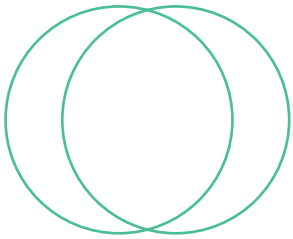


Рис. 59

УПРАЖНЕНИЯ

39. Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) окружность; в) прямая?

40. Сколько осей симметрии имеет фигура, состоящая из двух равных окружностей (рис. 59)?

41. Нарисуйте многоугольник, у которого ровно: а) одна; б) две; в) пять; г) шесть осей симметрии.

42. Составьте из четырёх фигурок, показанных на рисунке, одну фигуру, имеющую ось симметрии (рис. 60).

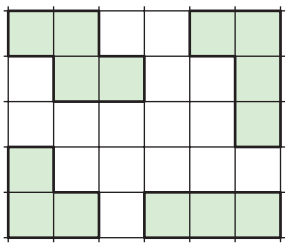


Рис. 60

Теперь разберём несколько примеров задач, в решении которых помогает осевая симметрия.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 9. ★☆☆ *(Задача Герона из Александрии)* Точки A и B лежат по одну сторону от прямой l. Постройте на этой прямой такую точку M, чтобы сумма отрезков $AM + BM$ была наименьшей (рис. 61).

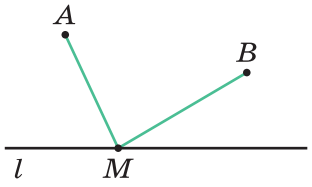


Рис. 61

РЕШЕНИЕ

Отразим точку B относительно прямой l. Пусть её образом при осевой симметрии будет точка B_1. Отрезки B_1M и BM симметричны относительно прямой l (рис. 62), поэтому $B_1M = BM$ для любой точки M на прямой l. Таким образом, мы получаем, что $AM + BM = AM + MB_1 \geqslant AB_1$.

Последнее неравенство выполняется для любой ломаной, соединяющей точки A и B_1. Поэтому сумма $AM + BM$ будет наименьшей в том случае, когда точка M лежит на отрезке AB_1.

Ответ: искомая точка M лежит на пересечении с прямой l отрезка AB_1, соединяющего точку A с образом точки B при осевой симметрии относительно прямой l.

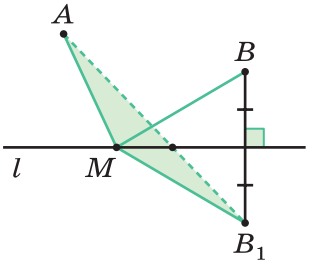


Рис. 64

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Задача Герона тесно связана с законом, по которому отражаются от плоского зеркала лучи света. Этот закон вам наверняка известен из уроков физики: *угол падения луча на зеркало всегда равен углу его отражения от зеркала* (рис. 63). Это правило было известно ещё Евклиду. Но только в XVII веке Пьер Ферма сформулировал основной принцип, который связал геометрию и физику: *луч света всегда идёт по пути, на который он тратит наименьшее время*.

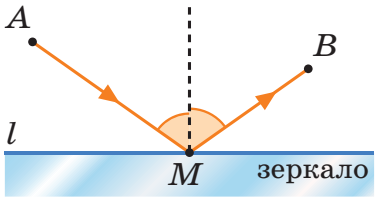


Рис. 62

Как принцип Ферма связан с законом отражения? Посмотрите на рисунок 64. На нём можно заметить важную особенность найденной нами точки M. Пусть отрезки AM и BM образуют с прямой l углы α и β. Треугольники BMH и B_1MH равны, поэтому отрезок B_1M с прямой l образует такой же угол β.

Отрезки AM и B_1M лежат на одной прямой, следовательно, они образуют с прямой l вертикальные углы. Поэтому эти углы равны, то есть $\alpha = \beta$. Значит, при падении на плоское зеркало луч света образует с ним такой же угол, как при отражении от зеркала.

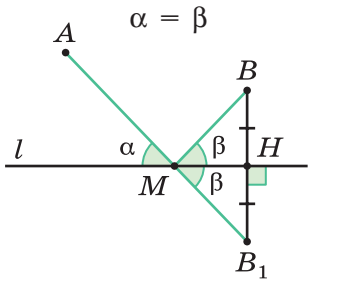


Рис. 63

Почему же за плоскостью зеркала мы видим ещё одно пространство, так называемое «зазеркалье»? Представим себе, что из точки B выходит множество лучей света. Все они после отражения от зеркала будут лежать на прямых, проходящих через симметричную точке B точку B_1 (рис. 65). Наблюдателю, находящемуся в других точках A, будет казаться, что он «видит» точку B_1. Говорят, что в этой точке находится мнимое изображение точки B. Поэтому зеркала как будто «удваивают» пространство, а осевую симметрию называют ещё зеркальной.

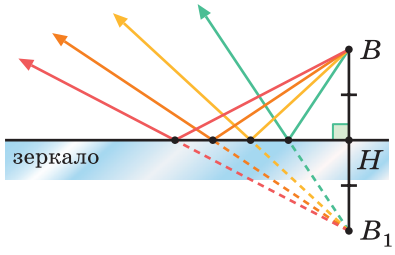


Рис. 65
Нам кажется, что лучи света выходят из точки в глубине зеркала, симметричной источнику света

ПРИМЕР 10. ★★☆ Внутри острого угла с вершиной O взяли точку A. Постройте на двух его сторонах точки B и C так, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим. Чему равен этот периметр, если $OA = 1$, а величина данного угла равна 30° (рис. 66)?

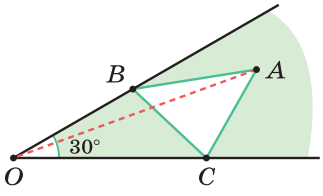


Рис. 66

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим точки A_1 и A_2, симметричные точке A относительно сторон данного угла. Отрезки A_1B и A_2C будут симметричны сторонам AB и AC треугольника ABC, поэтому $AB = A_1B$ и $AC = A_2C$ (рис. 67). Тогда периметр треугольника ABC можно представить как длину ломаной, соединяющей точки A_1 и A_2: $P_{ABC} = A_1B + BC + CA_2$.

Длина любой ломаной не может быть меньше отрезка, соединяющего её концы, поэтому периметр треугольни-

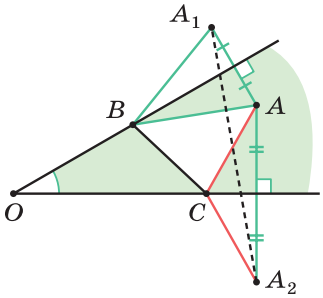


Рис. 67

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ка ABC всегда будет больше или равен длине отрезка A_1A_2. Равенство же будет только в том случае, когда три звена этой ломаной лежат на одной прямой, то есть когда точки B и C лежат на отрезке A_1A_2. Такое положение показано на рисунке 68, и в этом случае периметр треугольника ABC будет наименьшим.

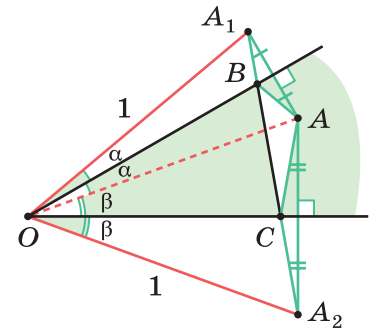


Рис. 68

Найдём теперь, чему равен этот наименьший периметр. Поскольку точки A_1 и A_2 симметричны точке A относительно сторон угла, то треугольники OAB и OA_1B будут симметричны относительно одной его стороны, а треугольники OAC и OA_2C — относительно другой. Следовательно, эти треугольники попарно равны. Значит, $OA_1 = OA_2 = OA = 1$. Кроме того, угол AOB будет равен углу A_1OB, мы обозначим их величину буквой α. Так же равны углы AOC и A_2OC, их величину обозначим как β. Поскольку точка A лежит внутри угла величиной $30°$, то $\alpha + \beta = 30°$. Значит, угол A_1OA_2 будет равен $2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 60°$.

Отсюда следует, что треугольник A_1OA_2 — равносторонний, поэтому $A_1A_2 = 1$. А поскольку наименьший периметр треугольника ABC равен длине отрезка A_1A_2, то он равен 1.

Ответ: 1.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ЗАДАЧИ

53. ★☆☆ Часы показывают 13 : 20. Найдите точное время, в которое положение стрелок на часах симметрично показанному на рисунке относительно а) вертикального; б) горизонтального диаметра циферблата часов. (⏩ рис.)

54. ★☆☆ Треугольник ABC отразили относительно прямой, проходящей через середины его сторон AB и BC. Найдите площадь общей части исходного и отражённого треугольника, если сторона клетки равна 1. (⏩ рис.)

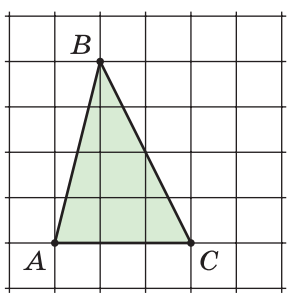
55. ★☆☆ Четырёхугольник $ABCD$, показанный на рисунке, отразили относительно его диагонали BD. Найдите площадь пересечения исходного четырёхугольника и отражённого, если сторона одной клетки равна 1. (⏩ рис.)

56. ★☆☆ Отрезки AC и BC на клетчатой бумаге образуют равные углы с прямой l. Найдите сумму длин этих отрезков, если сторона одной клетки равна 1. (⏩ рис.)

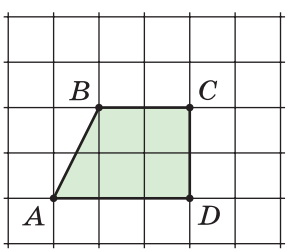
57. ★☆☆ Прямая пересекает отрезок AB в точке, отличной от его середины.



⏩ задача 53

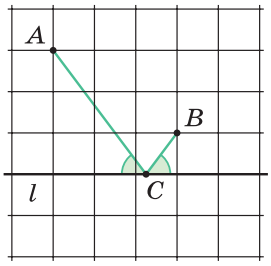


⏩ задача 54

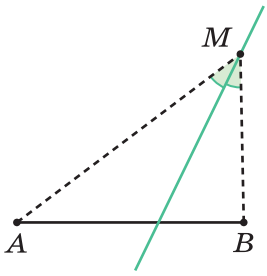


⏩ задача 55

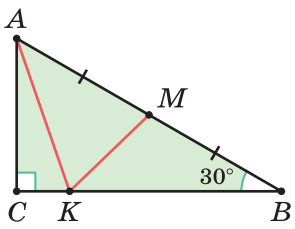
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 56



задача 57



задача 58

Постройте на этой прямой такую точку M, чтобы лучи AM и BM образовывали с данной прямой равные углы. Сколько может быть таких точек? (▸▸ рис.)

58. ★☆☆ Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, угол B которого равен 30°. На его катете BC выбрали такую точку K, что $AK + KM = BC$. Докажите, что отрезок MK перпендикулярен гипотенузе AB. (▸▸ рис.)

59. ★☆☆ *Эллипсом* называют множество всех точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 (называемых его *фокусами*) постоянна. Внешне эллипс похож на овал или вытянутую окружность. Докажите, что эллипс имеет две оси симметрии, причём эти оси перпендикулярны друг другу. (▸▸ рис.)

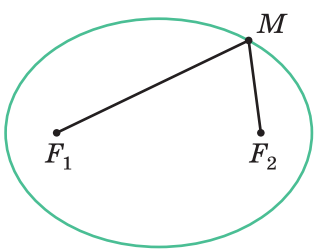
60. ★★☆ Отрезки AM и BM образуют равные углы с диаметром полукруга. Найдите его радиус, если $AM = 10$, $BM = 20$, а расстояние от центра полукруга до отрезка MB равно 8. (▸▸ рис.)

61. ★★☆ Треугольник ABC, изображённый на клетчатой бумаге, отразили относительно прямой, проходящей через середины его сторон AB и BC. Найдите площадь общей части исходного треугольника и отражённого, если сторона одной клетки равна 1. (▸▸ рис.)

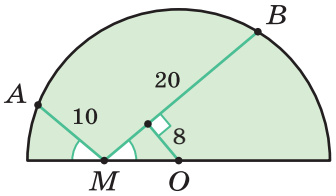
62. ★★☆ Центры вписанной и описанной окружностей треугольника симметричны относительно одной из его сторон. Найдите углы этого треугольника.

63. ★★☆ Точки A и B лежат по разные стороны от прямой. Постройте на этой прямой такую точку M, чтобы модуль разности расстояний AM — BM был наибольшим.

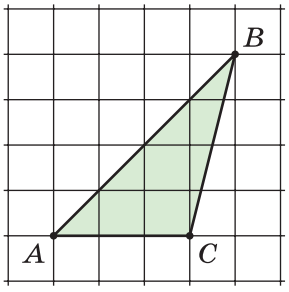
64. ★★☆ Постройте четырёхугольник $ABCD$, диагональ AC которого делит угол BAD пополам, если известны длины всех его сторон.



задача 59

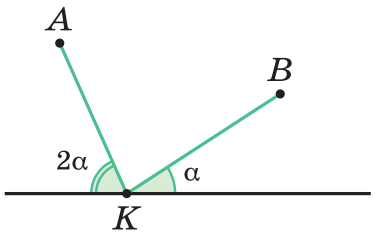


задача 60

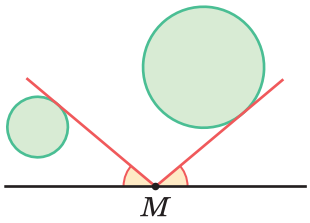


задача 61

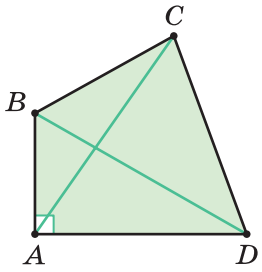
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 67



задача 68



задача 69

65. ★★☆ Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

66. ★★☆ Постройте треугольник по стороне, проведённой к ней высоте и разности углов, прилежащих к этой стороне.

67. ★★☆ Точки A и B лежат по одну сторону от прямой. Постройте такую точку K на этой прямой, чтобы отрезок AK образовывал с ней угол в два раза больший, чем отрезок BK. (▸▸ рис.)

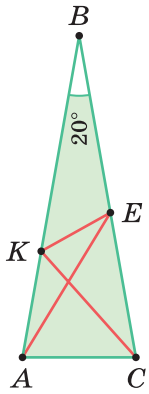
68. ★★☆ Две окружности лежат по одну сторону от прямой. Различные касательные к ним, проведённые из некоторой точки M этой прямой, образуют с ней равные углы. Сколько может быть таких точек? (▸▸ рис.)

69. ★★☆ В четырёхугольнике $ABCD$ угол BAD — прямой. Докажите, что $BC + CD + BD > 2 \cdot AC$. (▸▸ рис.)

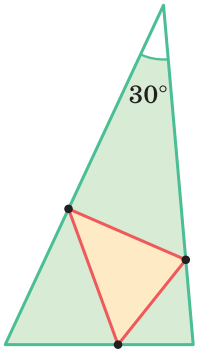
70. ★★☆ Внутри острого угла с вершиной M взяли точку A. Постройте на сторонах угла точки B и C так, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим. Чему равен наименьший периметр треугольника ABC, если расстояния от точки A до сторон угла равны 25 и 39, а расстояние до его вершины равно 65?

71. ★★☆ В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 1, а угол ABC равен 20°. На стороне AB выбрали произвольную точку K, а на стороне BC — произвольную точку E. Найдите наименьшее значение суммы $AE + EK + KC$. (▸▸ рис.)

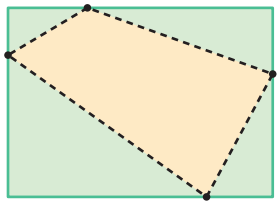
72. ★★☆ Один из углов остроугольного треугольника равен 30°. На каждой его стороне выбрали по одной точке. Докажите, что наименьший периметр треугольника с вершинами в этих точках равен одной из высот исходного треугольника. (▸▸ рис.)



задача 71

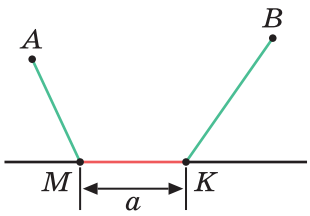


задача 72

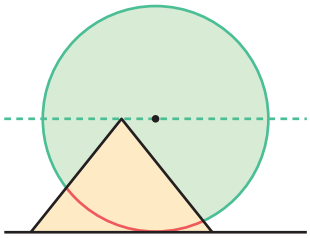


задача 73

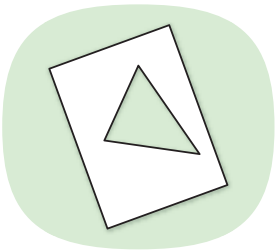
© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022



задача 74



задача 75



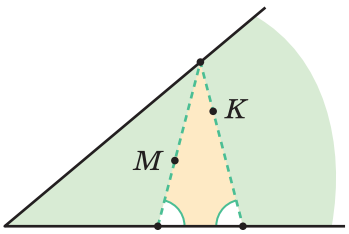
задача 76

73. ★★☆ На каждой стороне прямоугольника взяли по одной точке. Докажите, что наименьший периметр четырёхугольника с вершинами в этих точках равен сумме диагоналей прямоугольника. (▸▸ рис.)

74. ★★☆ Точки A и B лежат по одну сторону от прямой. Как на этой прямой расположить отрезок MK данной длины a так, чтобы длина ломаной $AM + MK + BK$ была наименьшей? (▸▸ рис.)

75. ★★☆ По прямой, содержащей основание равнобедренного треугольника, катится окружность с радиусом, равным его высоте. Докажите, что длина дуги этой окружности, заключённой внутри треугольника, не меняется. (▸▸ рис.)

76. ★★★ На листе бумаги нарисован треугольник. Сложите этот лист так, чтобы одним прямым разрезом получить в нем дыру в виде данного треугольника. (▸▸ рис.)



задача 79

77. ★★★ На каждой стороне остроугольного треугольника взяли по одной точке и соединили их. Где выбрать три эти точки так, чтобы периметр получившегося треугольника был наименьшим? Докажите, что наименьший периметр такого треугольника можно вычислять по формуле $p = \frac{2S}{R}$, где S — площадь, а R — радиус описанной окружности данного треугольника.

78. ★★★ Длины сторон четырёхугольника с площадью S, взятые по порядку, равны a, b, c, d. Докажите, что:

а) $S \le \frac{(ab+cd)}{2}$; б) $S \le \frac{(ac+bd)}{2}$.

Для каких четырёхугольников достигается равенство в пункте б)?

79. ★★★ Внутри угла взяты точки M и K. Постройте равнобедренный треугольник, основание которого лежало бы на одной стороне угла, противоположная вершина — на другой, а боковые стороны проходили бы через эти точки. (▸▸ рис.)

80. ★★★ К боковым сторонам равнобедренного треугольника провели высоты. Оказалось, что отрезок, соединяющий основания этих высот, в два раза меньше разности боковой стороны и основания данного треугольника. Найдите угол между боковыми сторонами этого треугольника.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

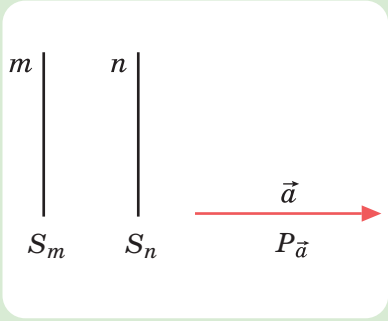
Композиции симметрий

Среди всех движений плоскости осевая симметрия играет особую роль, ведь любое движение можно представить с помощью нескольких таких симметрий. Последовательное применение нескольких движений называют *композицией*. Оказывается, что параллельный перенос или поворот вокруг точки являются композицией всего двух осевых симметрий. Чтобы в этом убедиться, мы докажем две теоремы. А поскольку перемещение любого треугольника однозначно задаёт движение всех точек плоскости, то для доказательства каждой теоремы мы будем выбирать удобный нам треугольник ABC и следить за тем, куда перейдут все его вершины после применения двух этих симметрий. Первая теорема будет о параллельном переносе.

ТЕОРЕМА

Параллельный перенос можно представить композицией двух осевых симметрий, оси которых перпендикулярны вектору этого переноса.

Расстояние между осями симметрий должно быть равно половине модуля вектора этого переноса.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть параллельный перенос задан вектором $\vec{a}$ и произвольную точку A он перемещает в точку A_1. Выберем в качестве осей симметрий прямые m и n, перпендикулярные вектору $\overrightarrow{AA_1}$, так, чтобы точка A лежала на прямой m, а прямая n была серединным перпендикуляром к отрезку AA_1 (рис. 69).

Рассмотрим треугольник ABC, у которого вершины A и B лежат на прямой m, а вершина C — на прямой n

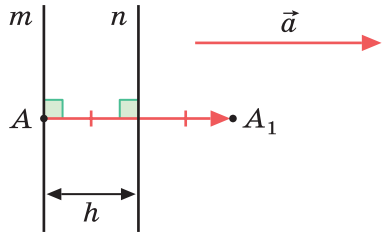


Рис. 69

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

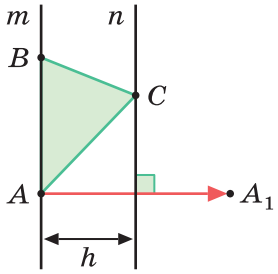


Рис. 70

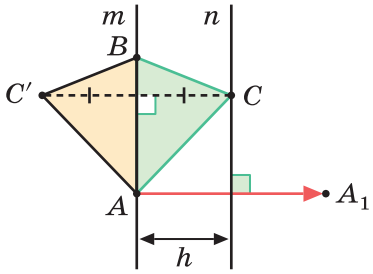


Рис. 71

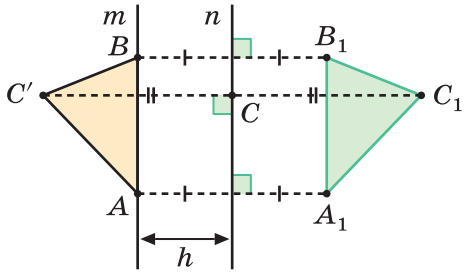


Рис. 72

(рис. 70). Сначала сделаем осевую симметрию относительно прямой m: точки A и B тогда останутся на месте, а точка C перейдёт в симметричную ей точку C' (рис. 71). При этом длина отрезка CC' будет в два раза больше расстояния h между прямыми m и n, то есть она будет равна модулю вектора переноса $|\vec{a}|$.

Теперь рассмотрим вторую симметрию — относительно прямой n. Тогда точки A и B перейдут в точки A_1 и B_1, а точка C' — в точку C_1 (рис. 72). При этом длина каждого из отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 будет равна $2h = |\vec{a}|$. Поскольку эти отрезки параллельны и равны друг другу, то равны векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$. Следовательно, последовательное применение (или композиция) симметрий относительно прямых m и n перемещает треугольник ABC так же, как и параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ (рис. 73). По теореме о движении треугольника параллельный перенос и композиция двух таких симметрий перемещают все точки плоскости одинаково. Значит, эти движения совпадают.

Что и требовалось доказать.

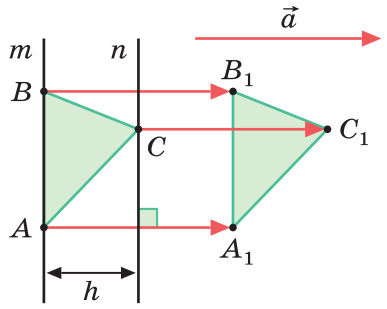


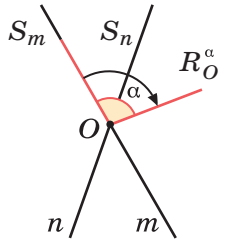
Рис. 73

Вторая теорема будет о представлении поворота композицией двух симметрий.

ТЕОРЕМА

Поворот можно представить последовательным применением (или композицией) двух осевых симметрий, оси которых проходят через точку поворота.

Угол между осями симметрий должен быть равен половине угла этого поворота.



© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть поворот вокруг центра O совершается по часовой стрелке на угол α и переводит произвольную точку A в точку A_1 (рис. 74). Давайте в качестве двух осей симметрии выберем прямые m и n так, чтобы прямая m совпадала с прямой OA, а прямая n делила угол AOA_1 пополам (рис. 75). Легко доказать, что точки A и A_1 будут симметричны относительно прямой n. Мы докажем, что последовательное выполнение симметрий относительно прямых m и n эквивалентно повороту вокруг точки O на угол α.

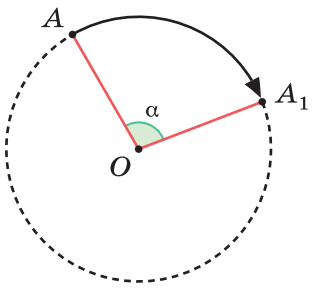


Рис. 74

Рассмотрим треугольник AOB, вершина B которого лежит на прямой n и получается из вершины A поворотом вокруг центра O на угол $\frac{\alpha}{2}$ по часовой стрелке (рис. 76). Будем следить за движением этого треугольника при симметриях относительно прямых m и n. Сначала сделаем симметрию относительно прямой m: точки A и O при этом останутся на месте, а точка B перейдёт в симметричную ей точку B' (рис. 77). Треугольник AOB тогда перейдёт в равный ему треугольник AOB', причём угол $B'OB$ будет равен α.

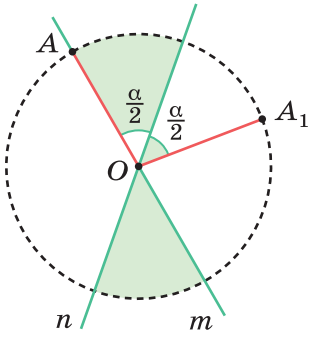


Рис. 75

Теперь сделаем симметрию относительно второй прямой n: точки A и B' тогда перейдут в симметричные им точки A_1 и B_1, а углы AOA_1 и BOB_1 окажутся равны α (рис. 78).

Итак, последовательное применение (или композиция) двух симметрий относительно прямых m и n переводит точки A и B в такие точки A_1 и B_1, что углы AOA_1 и BOB_1 равны α. При этом треугольник AOB переходит в треугольник A_1OB_1 (рис. 79). По определению поворот с центром O на угол α по часовой стрелке тоже перемещает треугольник AOB в треугольник A_1OB_1. Значит, по теореме о перемещении треугольника эти движения совпадают для всех точек плоскости.

Что и требовалось доказать.

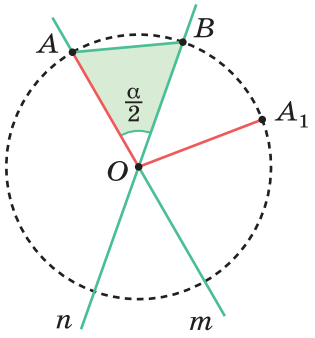


Рис. 76

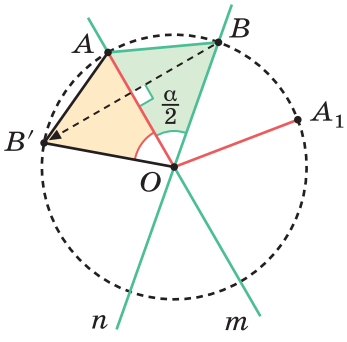


Рис. 77

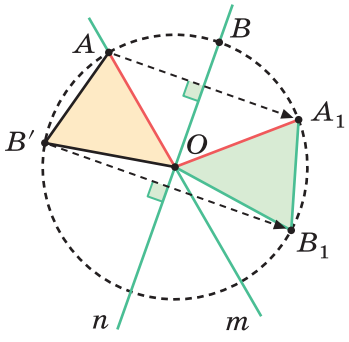


Рис. 78

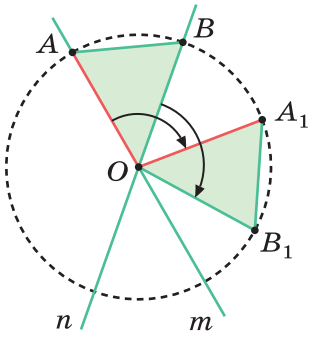


Рис. 79

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

Мы с вами уже говорили о том, что любое движение плоскости сводится к трём основным движениям: симметрии, параллельному переносу и повороту. Но как можно это доказать? Давайте подумаем: параллельный перенос и поворот сводятся к последовательному применению двух симметрий. Значит, любое из основных движений либо само является симметрией, либо его можно заменить двумя осевыми симметриями. А сколько таких симметрий нужно, чтобы заменить ими произвольное движение? Оказывается, всегда достаточно не более трёх осевых симметрий. И в этом заключается следующая теорема.

ТЕОРЕМА О ТРЁХ ОСЕВЫХ СИММЕТРИЯХ

Любое движение является последовательным применением (или композицией) не более чем трёх осевых симметрий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Мы уже с вами знаем, что любое движение плоскости однозначно задаётся перемещением одного треугольника. Возьмём треугольник ABC и предположим, что в результате некоторого движения он перешёл в равный ему треугольник $A_1B_1C_1$, произвольно расположенный на плоскости (на рисунке 80 и далее эти треугольники показаны зелёным цветом).

В качестве первой оси симметрии l_1 давайте выберем серединный перпендикуляр к отрезку AA_1. Сделаем симметрию относительно прямой l_1: тогда точка A перейдёт в точку A_1, а точки B и C — в симметричные им точки B' и C' (рис. 81). Конечно, может оказаться так, что точки B' и C' сразу совпадут с вершинами B_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 82). Это будет означать только то, что

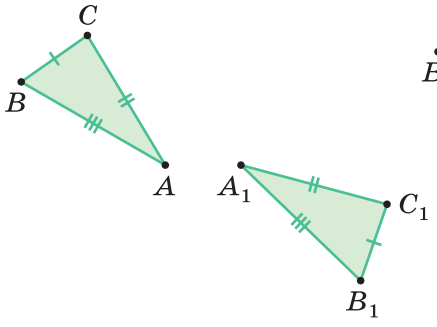


Рис. 80

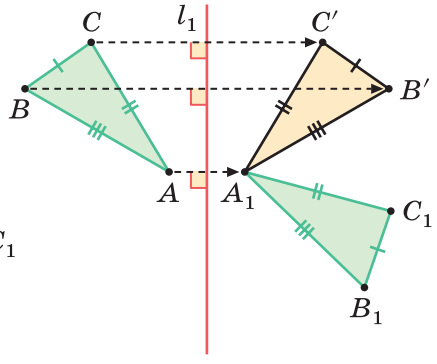


Рис. 81

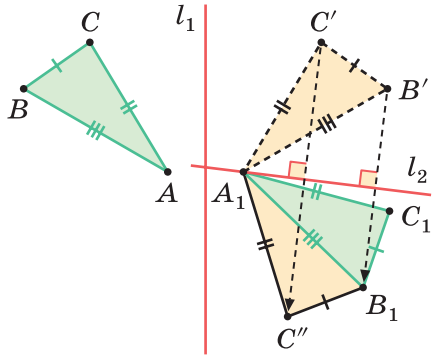


Рис. 82

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022

треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ были симметричны относительно прямой l_1 и для их совмещения нам хватит тогда лишь одной симметрии.

Предположим теперь, что точки B' и B_1 различаются. В этом случае в качестве второй оси симметрии l_2 мы выберем серединный перпендикуляр к отрезку $B'B_1$. Заметим, что по определению движения выполняются равенства $A_1B_1 = AB = A_1B'$, следовательно, точка A_1 равноудалена от точек B' и B_1 и должна лежать на прямой l_2. Сделаем симметрию относительно прямой l_2: точка A_1 тогда останется на месте, точка B' перейдёт в точку B_1, а точка C' — в симметричную ей точку C''.

Если точка C'' совпадёт с вершиной C_1, то это будет означать, что для совмещения равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ нам хватит двух симметрий относительно прямых l_1 и l_2. В противном случае точки C'' и C_1 будут различны. Легко догадаться, что тогда третью ось симметрии l_3 нужно расположить по прямой A_1B_1 (рис. 83). При симметрии относительно прямой l_3 точки A_1 и B_1 останутся на своих местах, а точка C'' перейдёт в точку C_1. Тогда треугольник A_1B_1C'' перейдёт в треугольник $A_1B_1C_1$, и это значит, что для совмещения треугольника ABC с любым равным ему треугольником $A_1B_1C_1$ достаточно сделать три симметрии относительно прямых l_1, l_2 и l_3. Таким образом, мы доказали, что в любом случае достаточно не более трёх осевых симметрий.

Что и требовалось доказать.

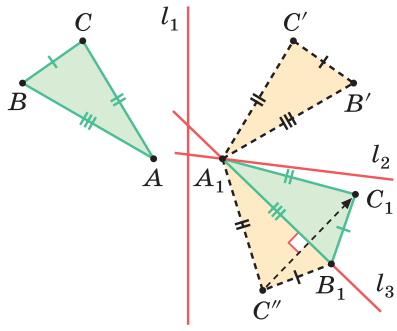


Рис. 83

Какой главный вывод следует из доказанных нами трёх теорем? Любое движение фигуры на плоскости можно представить не более чем тремя осевыми симметриями. А композиция любых двух таких симметрий относительно различных прямых — это поворот или параллельный перенос. Значит, любое движение является либо одной симметрией, либо параллельным переносом или поворотом, либо их композицией. В этом и заключается одна из формулировок знаменитой теоремы Шаля о движениях плоскости.

© ЧОУ ДПО МЦНМО, 2022