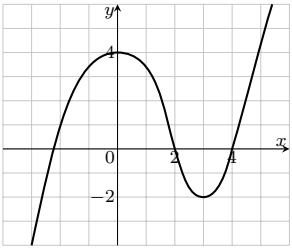
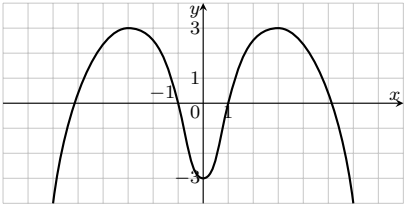
Преобразования графиков $y = kf(x)$ и $y = f(kx)$

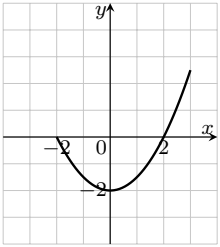
1. Используя график $y = f(x)$, постройте графики функций:



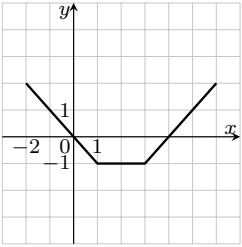
$y = \dfrac{1}{2}f(x)$; $y = -f(x)$;
$y = -2f(x)$.



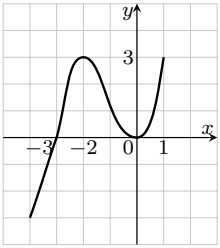
$y = \dfrac{1}{3}f(x)$; $y = -\dfrac{1}{2}f(x)$.



$y = f(-x)$.

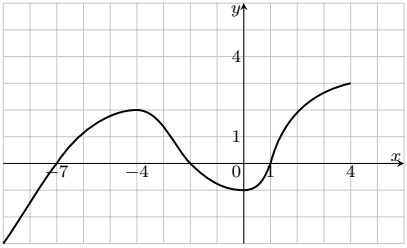


$y = f(-x)$.

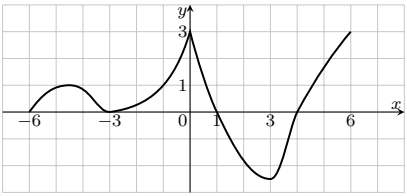


$y = f(-x)$.

$y = f(2x)$; $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$.



$y = f\left(\frac{3}{2}x\right)$; $y = f(-3x)$.



2. Постройте графики функций:

а) Зная график $y = \sqrt{x-2}$, постройте $y = \sqrt{x-2}$.

б) Зная график $y = x^2$, постройте $y = 3x^2$; $y = -\frac{1}{4}x^2$.

в) Зная график $y = \sqrt{x}$, постройте $y = 4\sqrt{x}$; $y = \sqrt{-\frac{x}{3}}$; $y = -\sqrt{x}$; $y = \sqrt{3x}$.

г) Зная график $y = |x|$, постройте $y = \frac{1}{2}|x|$; $y = -2|x|$.

Обозначения. $[x]$ — целая часть числа x: единственное целое число n, для которого $n \leqslant x < n+1$. $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа x. Функция $\operatorname{sgn} x$ определяется так:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

3. Постройте графики функций:

1) $y = 2[x]$;
2) $y = -\frac{1}{2}\{x\}$;
3) $y = 3\operatorname{sgn} x$;
4) $y = -\frac{1}{2}[x]$;
5) $y = 2\{x\}$;
6) $y = -2\operatorname{sgn} x$;
7) $y = [2x]$;
8) $y = \left\{-\frac{x}{2}\right\}$;
9) $y = \left[-\frac{x}{2}\right]$;
10) $y = \{2x\}$.

$y = f(x) + a$ и $y = f(x + a)$

4. График какой функции получится, если график функции $y = x^2$ параллельно перенести:

1) на 6 единиц вверх;
2) на 9 единиц вправо;
3) на 12 единиц вниз;
4) на 7 единиц влево;
5) на 2 единицы вправо и на 3 единицы вниз;
6) на 1 единицу влево и на 1 единицу вверх?

5. Выберите функцию, график которой получится при указанном параллельном переносе графика $y = x^2$.

а) На 4 единицы вправо:

$y = x^2 + 4$; $y = x^2 - 4$; $y = (x + 4)^2$; $y = (x - 4)^2$.

б) На 5 единиц вверх:

$y = x^2 + 5$; $y = x^2 - 5$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x - 5)^2$.

6. Выберите параллельный перенос, который переводит первый график во второй.

1) $y = \dfrac{5}{x}$ в $y = \dfrac{5}{x - 8}$:

на 8 единиц вверх; на 8 единиц вниз;

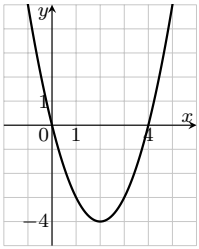
на 8 единиц вправо; на 8 единиц влево.

2) $y = \sqrt{x}$ в $y = \sqrt{x + 3}$:

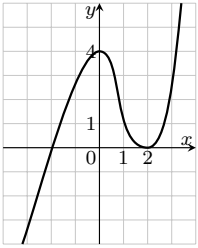
на 3 единицы вправо; на 3 единицы влево.

7. Используя график $y = f(x)$, постройте графики функций:

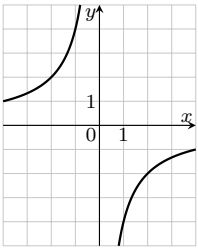
$y = f(x) - 2$; $y = f(x) + 4$;
$y = f(x - 3)$; $y = f(x + 1)$;
$y = -f(x)$; $y = 3 - f(x)$.



$y = f(x) - 2$; $y = f(x) + 4$;
$y = f(x - 3)$; $y = f(x + 1)$;
$y = -f(x)$; $y = 3 - f(x)$.



$y = f(x) - 2$; $y = f(x) + 4$;
$y = f(x - 3)$; $y = f(x + 1)$;
$y = -f(x)$; $y = 3 - f(x)$.



$y = f(x) + 5$; $y = f(x) - 3$;
$y = f(x + 1)$; $y = f(x - 2)$;
$y = -f(x)$; $y = -f(x) - 1$.



8. Постройте на одной координатной плоскости:

а) $y = x^2$ (базовый график); $y = x^2 - 3$; $y = x^2 + 4$;
$y = (x - 5)^2$; $y = (x + 2)^2$; $y = (x - 1)^2 + 2$; $y = (x + 3)^2 - 2$;
$y = (2x + 1)^2$; $y = (3x - 1)^2$.

б) $y = -x^2$ (базовый график); $y = -x^2 + 1$; $y = -x^2 - 2$;
$y = -(x - 2)^2$; $y = -(x + 4)^2$; $y = -(x + 1)^2 - 1$;
$y = -(x - 3)^2 + 4$.

в) $y = -\dfrac{6}{x}$ (базовый график); $y = -\dfrac{6}{x} + 5$; $y = -\dfrac{6}{x - 2}$;
$y = -\dfrac{6}{x + 4} - 2$.

г) $y = \dfrac{2}{x}$ (базовый график); $y = \dfrac{2}{x} - 1$; $y = \dfrac{2}{x + 1}$;
$y = \dfrac{2}{x - 3} + 6$.

д) $y = \sqrt{x}$ (базовый график); $y = \sqrt{x} - 4$; $y = \sqrt{x-4}$;
$y = \sqrt{x-1} + 3$; $y = \sqrt{4x-1}$; $y = \sqrt{1 - \dfrac{x}{2}}$; $y = \sqrt{3x+1}$;
$y = \sqrt{-\dfrac{x}{3}} - 1$.

е) $y = |x|$ (базовый график); $y = |x-2| + 1$; $y = |3-x| - 2$;
$y = 3 - |x+2|$; $y = \dfrac{1}{2}|x+1| - 3$; $y = 1 - 2|x-1|$;
$y = |x-1| - 3$; $y = 2 - |x+4|$; $y = 2 - 3|x+1|$;
$y = |2x-1|$; $y = |3x+2|$.

ж) $y = [x]$ (базовый график); $y = [x-1]$; $y = [x] - 1$;
$y = [2x-1]$; $y = [1-3x]$; $y = [x+1]$; $y = [x] + 2$;
$y = [3x+1]$; $y = [1-2x]$.

з) $y = \{x\}$ (базовый график); $y = \left\{x + \dfrac{1}{2}\right\}$; $y = \{x\} - 1$;
$y = \left\{\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}\right\}$; $y = \left\{\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3}\right\}$; $y = \left\{x - \dfrac{1}{3}\right\}$; $y = \{x\} + 1$;
$y = \left\{\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{2}\right\}$; $y = \left\{\dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{2}\right\}$.

9. Постройте графики функций:

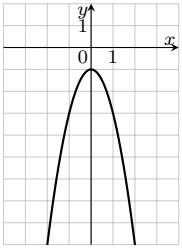
а) $y = (x+5)^2 - 9$; б) $y = (x-4)^2 + 4$.

Для каждой функции найдите:

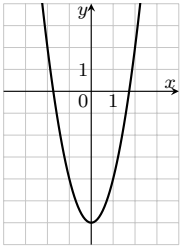
1) нули;
2) значения x, при которых первая функция положительна, а вторая отрицательна;
3) промежутки возрастания и убывания;
4) область значений.

10. Задайте формулой функцию.

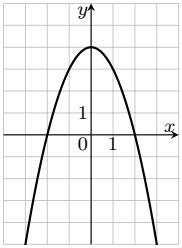
а)



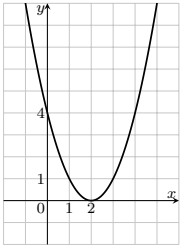
б)



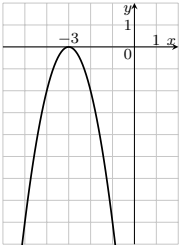
в)



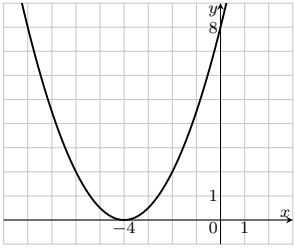
г)



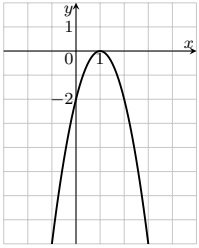
д)



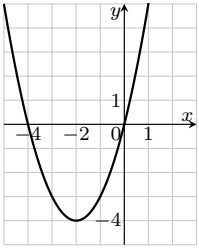
е)



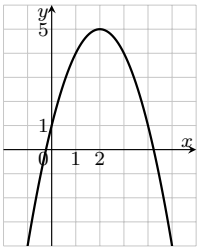
ж)



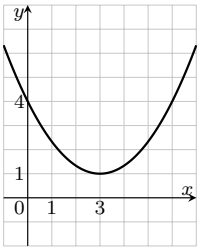
з)



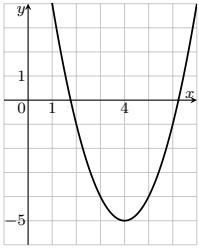
и)



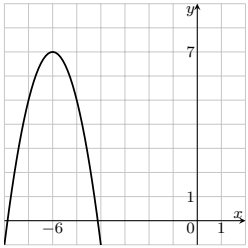
к)



л)



м)



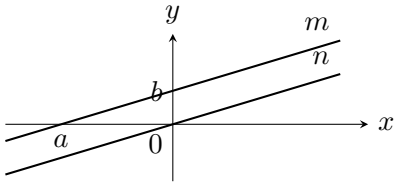
11. Решите графически уравнения:

1) $(x-1)^2 = \dfrac{2}{x}$; 2) $2 - x^2 = \sqrt{x}$; 3) $\dfrac{3}{x} = \sqrt{x} + 2$.

12. Какое из утверждений верно для параллельных прямых m и n, если n — график функции $y = f(x)$?

а) Прямая m — график $y = f(x) + b$.

б) Прямая m — график $y = f(x - a)$.



13. Задайте каждую функцию формулой вида $y = \dfrac{k}{x+a} + b$ и постройте её график, используя график $y = \dfrac{k}{x}$:

1) $y = \dfrac{3x+8}{x}$; 2) $y = \dfrac{2x+14}{x+3}$; 3) $y = \dfrac{-2x}{x-1}$;

4) $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$; 5) $y = \dfrac{4x+14}{x+1}$; 6) $y = \dfrac{7-x}{x-2}$;

7) $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$.

14. Определите количество корней каждого уравнения в зависимости от значения параметра a:

1) $a - |x| = x^2$; 2) $\sqrt{x-a} = 1 - x$;

3) $\sqrt{x+a} = 2 - x$; 4) $3|x| = |x-a|$;

5) $|x-a| + |x| = 2$; 6) $x^2 + 1 = |x-a|$;

7) $2 - x^2 = |x+a|$.

15. При каких значениях параметра a уравнение $|x| + a = -x^2$ имеет два корня?

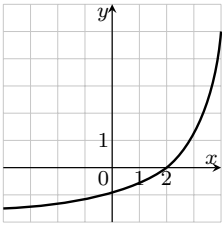
16. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на указанном отрезке в зависимости от значения параметра a:

1) $f(x) = |x-a|$, отрезок $[1;3]$;
2) $y = (x+a)^2$, отрезок $[-4;-2]$.

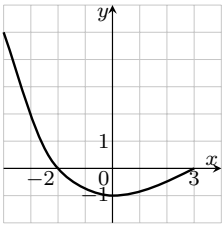
$y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$

17. Используя график $y = f(x)$, постройте графики функций:

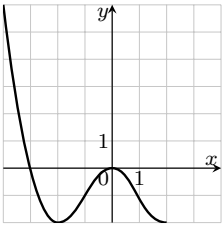
а) $y = f(|x|)$; $y = |f(x)|$.



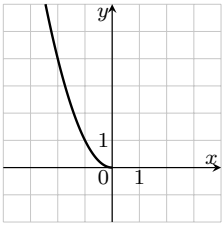
б) $y = f(|x|)$; $y = |f(x)|$.



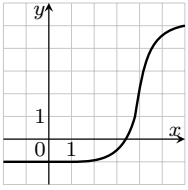
в) $y = f(|x|)$; $y = |f(x)|$.



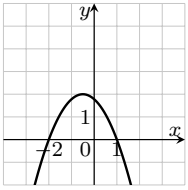
г) $y = f(|x|)$; $y = |f(x)|$.



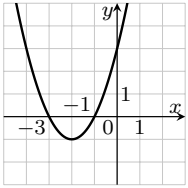
д) $y = f(|x|)$; $y = |f(x)|$.



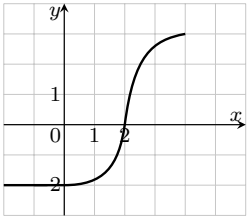
е) $y = f(|x|)$; $y = |f(x)|$.



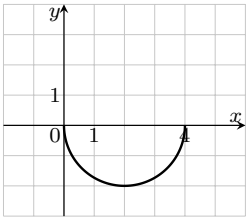
ж) $y = f(|x|)$; $y = |f(x)|$.



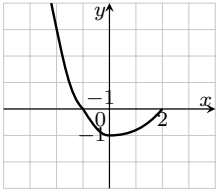
з) $y = f(|x|)$.



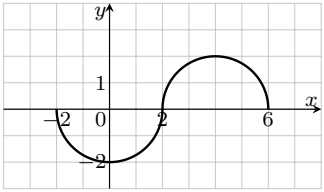
и) $y = f(|x|)$.



к) $y = f(|x| - 1)$; $y = f(|x - 1|)$.



л) $y = f(|x| + 2)$; $y = f(|x + 2|)$.



18. Постройте графики функций:

1) $y = \dfrac{1}{|x|}$;
2) $y = -\dfrac{6}{|x|}$;
3) $y = \dfrac{2}{|x|}$;
4) $y = -\dfrac{1}{|x|}$;
5) $y = |x^2 - 1|$;
6) $y = |\sqrt{x} - 2|$;
7) $y = \left|\dfrac{2}{x} - 1\right|$;
8) $y = \left|\dfrac{2}{x - 1}\right|$;
9) $y = \left|\dfrac{x - 4}{x + 1}\right|$;
10) $y = |x^2 - 4|$;

11) $y = |\sqrt{x} - 1|$;

12) $y = \left|\dfrac{4}{x} - 2\right|$;

13) $y = \left|\dfrac{4}{x-2}\right|$;

14) $y = \left|\dfrac{x+2}{x-3}\right|$;

15) $y = (|x| - 1)^2$;

16) $y = \sqrt{|x| + 2}$;

17) $y = \dfrac{1}{|x| - 3}$;

18) $y = \sqrt{1 - |x|}$;

19) $y = (|x| + 2)^2$;

20) $y = \sqrt{|x| - 3}$;

21) $y = \dfrac{1}{|x| - 4}$;

22) $y = \sqrt{2 - |x|}$;

23) $y = \sqrt{|x + 2|}$;

24) $y = (|x - 2| - 1)^2$;

25) $y = \sqrt{|x - 1| + 2}$;

26) $y = \dfrac{1}{|x + 1| - 3}$;

27) $y = \sqrt{|x - 3|}$;

28) $y = (|x + 1| + 2)^2$;

29) $y = \sqrt{|x - 2| - 3}$;

30) $y = \dfrac{1}{|x - 1| - 4}$;

31) $y = \sqrt{2|x| - 1}$;

32) $y = \sqrt{1 - 3|x|}$;

33) $y = \sqrt{|2x - 1|}$;

34) $y = \sqrt{3|x| + 1}$;

35) $y = \sqrt{|3x + 1|}$;

36) $y = \left|\dfrac{4}{|x|} - 2\right|$;

37) $y = \left|\dfrac{4}{|x| - 2}\right|$;

38) $y = \Big|1 - \big|1 - |x|\big|\Big|$;

39) $y = \big||x| - 4\big|$;

40) $y = \big|2|x| - 4\big|$;

41) $y = \Big|\big||x - 1| - 1\big| - 1\Big|$;

42) $y = \left|\sqrt{|x| - 1} - 1\right|$;

43) $y = \left|\sqrt{|x - 1|} - 1\right|$;

44) $y = \left|\dfrac{1}{|x| - 2} - 1\right|$;

45) $y = \left|\dfrac{1}{|x - 2|} - 1\right|$;

46) $y = \left|\dfrac{|x| + 2}{|x| - 1}\right|$;

47) $y = \left|\sqrt{2|x| - 1} - 1\right|$;

48) $y = \left|\sqrt{|3x + 1|} - 2\right|$;

49) $y = \left|\dfrac{|x| - 2}{|x| + 1}\right|$.

19. О функции $y = f(x)$ известно, что $D(f) = [-3; 7]$ и $E(f) = [-6; 5]$. Найдите:

1) область определения функции $y = f(|x|)$;
2) область определения и область значений функции $y = |f(x)|$.

20. Для функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$ найдите нули и промежутки знакопостоянства в каждом случае. Известно, что $D(f) = \mathbb{R}$.

а) Нули функции f: -3 и 2; $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

б) Нули функции f: -1 и 3; $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

21. Определите количество корней каждого уравнения в зависимости от значения параметра a:

1) $\big||x| - 1\big| = a$;
2) $\big|(x+1)^2 - 1\big| = a$;
3) $\big|(|x| - 1)^2 - 1\big| = a$;
4) $|\sqrt{x} - 2| = a$;
5) $|x^2 - 1| = a$;
6) $\big|(x+2)^2 - 3\big| = a$;
7) $\big|(|x| - 2)^2 - 3\big| = a$.

22. Найдите значения параметра a, при которых уравнения имеют указанное количество корней.

а) Бесконечно много корней:

1) $\big||x - 1| - 1\big| = x - a$;
2) $\big||x + 2| - 3\big| = a - x$.

б) Три корня:

1) $\big|2|x - 1| - 3\big| = x - a$;
2) $\big|3|x + 1| - 2\big| = a - x$.

в) Один корень:

1) $\big|2|x + a| - 1\big| = x - 1$;
2) $\big|3|x - a| - 2\big| = 2 - x$.