Графы. Введение (без теории)

1. (Только ответ) В графе 12 вершин. Степени одиннадцати из них равны соответственно 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Чему равна степень оставшейся вершины?

2. (Только ответ) В графе 12 вершин. Ровно три вершины имеют степень 2. Какое наибольшее число рёбер может быть в таком графе?

3. (Только ответ) В графе 11 вершин. Ровно шесть из них имеют нечётные степени. Какое наибольшее число рёбер может быть в графе?

4. (Только ответ) Пять команд сыграли каждая с каждой по одному разу. Ничьих не было. Каждая команда одержала чётное число побед. Сколько существует вариантов результатов всего турнира? Команды различаются. Два варианта различны, если хотя бы один матч имеет разного победителя.

5. (Только ответ) В графе 12 вершин, степень каждой равна 3. Рёбра графа образуют ровно четыре треугольника. Сколько существует путей из трёх рёбер, проходящих через четыре различные вершины? Путь и тот же путь в обратном направлении считаются одним. Треугольник — три вершины, попарно соединённые рёбрами.

6. (Только ответ) В графе 8 вершин, степень каждой равна 4. У любых двух вершин, не соединённых ребром, ровно два общих соседа. Сколько в графе треугольников? Общий сосед двух вершин соединён ребром с каждой из них.

7. (Только ответ) В стране 9 городов. Каждый город соединён дорогами как минимум с пятью другими. Из города A выходит ровно пять дорог. Какое наименьшее число треугольных маршрутов может проходить через A? Треугольный маршрут проходит через три различных города и возвращается в исходный. Направление и выбор начального города не создают нового маршрута.

8. (Только ответ) В графе 8 вершин, степень каждой равна 6. Сколько в графе циклов длины 4? Цикл проходит через четыре различные вершины. Направление обхода и выбор начальной вершины не создают нового цикла. Диагонали допускаются.

9. (Только ответ) В стране из каждого города выходит ровно три дороги. Нет кольцевых маршрутов ни через три, ни через четыре различных города. Какое наименьшее число городов может быть в стране? Кольцевой маршрут проходит через различные города по кругу и возвращается в исходный город.

10. (Только ответ) Каждое ребро полного графа с шестью вершинами покрашено в красный или синий цвет. Какое наименьшее число одноцветных треугольников может получиться? Полный граф — граф, в котором каждые две различные вершины соединены ребром. Одноцветным считается треугольник, все три ребра которого одного цвета.

11. (Отслушка) Дорожная сеть связна, городов не меньше двух. Докажите, что можно закрыть один город вместе со всеми выходящими из него дорогами так, чтобы между любыми двумя оставшимися городами по-прежнему можно было проехать.

12. (Отслушка) Некоторые участники кружка дружат между собой (дружба взаимна). Докажите, что участников можно разделить на две группы так, чтобы у каждого было не меньше друзей в другой группе, чем в своей.

13. (Отслушка) В турнире каждая команда сыграла с каждой по одному разу, ничьих не было. Докажите, что команды можно расставить в ряд так, чтобы каждая команда, кроме последней, победила следующую за ней.

14. (Отслушка) Дорожная сеть связна. Из каждого города выходит чётное число дорог. Докажите, что между любыми двумя различными городами можно проложить два пути, не использующих общих дорог. Все дороги двусторонние. Дорог из города в него же и нескольких дорог между одной парой городов нет.