Неравенства между средними

«Алгебра, 9 класс»

Упражнения

1. Для действительных чисел x, y, z обозначим через A, B, C, D их средние квадратичное, арифметическое, геометрическое и гармоническое соответственно. В лекции доказывались неравенства для положительных значений переменных. Однако некоторые неравенства верны и в произвольном случае. Выберите все верные неравенства.

- ☐ $A \geqslant B$ для $x, y, z \in \mathbb{R}$;
- ☐ $A \geqslant C$ для $x, y, z \in \mathbb{R}$;
- ☐ $B \geqslant C$ для $x, y, z \in \mathbb{R}$;
- ☐ $B \geqslant C$ для положительных x и y и для $z \in \mathbb{R}$;
- ☐ $B \geqslant D$ для $x, y, z \in \mathbb{R}$ таких, что определено среднее гармоническое;
- ☐ $C \geqslant D$ для $x, y, z \in \mathbb{R}$ таких, что определено среднее гармоническое.

2. Произведение положительных чисел a, b, c, d равно 1. Пусть x — некоторое фиксированное действительное число такое, что наименьшее значение выражения

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{x}{d}$$

равно 8. Найдите x.

3. Найдите положительные x и y такие, что $16x^4 + y^4 + 32 = 32xy$.

4. Найдите x и y такие, что

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y-1}} + 4\sqrt{x-2} + \sqrt{y-1} = 28.$$

5. Найдите наименьшее возможное значение выражения $\left(\frac{3}{a} + 64a^3\right)^2$.

6. При каком $x \in [0, 1]$ функция $x(1-x)^3$ принимает наибольшее значение?

7. Положительные x, y, z таковы, что $2x + 3y + 4z = xyz$. Найдите минимальное значение выражения $3xy + 6yz + 4xz$.

Задачи

1. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\geqslant 4.$$

2. Докажите, что для любых положительных a, b, c выполнено неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

3. Сумма положительных чисел x, y, z равна 1. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}$.

4. Найдите минимальное значение выражения $x+\dfrac{1}{x^3}$ при $x>0$.

5. Докажите, что для положительных a, b, c выполнено неравенство

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}+\frac{bc}{b+c}\geqslant\frac{9abc}{2(ab+ac+bc)}.$$

6. Докажите, что для положительных a, b, c и натурального n выполнено неравенство

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^n+\left(\frac{b+c}{a}\right)^n+\left(\frac{a+c}{b}\right)^n\geqslant 3\cdot 2^n.$$

7. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\geqslant\sqrt[3]{\frac{abc+abd+bcd+acd}{4}}.$$

8. Сумма квадратов чисел a, b, c, d равна 4. Докажите, что $(2+a)(2+b)\geqslant cd$.

9. Произведение положительных чисел a, b, c равно 1. Докажите, что

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ac}{1+c}\geqslant 3.$$

10. Даны 6 чисел: $1\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5\leqslant x_6\leqslant 1000$. Найдите минимальное значение выражения

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_3}{x_4}+\frac{x_5}{x_6}.$$